УДК: 517.58

MSC2010: 47A58 **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-32-47**

СВЯЗЬ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ШУРА ОБОБЩЕННОГО КЛАССА НЕВАНЛИННЫ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ МАТРИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© Е. Н. Андреищева

Черноморское высшее военно-морское училище им. П. С. Нахимова
кафедра математики и начертательной геометрии
ул. Парковая, 6, Севастополь, 299057, Российская Федерация
e-mail: *anda_el@mail.ru*

Connection between the inverse Schur transformation for generalized Nevanlinna functions with the rational matrix functions of special type.

Andreishcheva E. N.

Abstract. In this paper we consider classical Schur transformation and inverse Schur transformation for generalized Nevanlinna functions. The function $N(z)$ is called a *generalized Nevanlinna functions with κ nagative squares*, if it is meromorphic in $\mathbb{C}^+$ and the kernel

$$L_N(z,w) = \frac{N(z) - N(w)^*}{z - w^*} \quad \left(= \frac{(1 \quad -N(z))J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(w)^* \end{pmatrix}}{z - w^*} \right)$$

has κ negative squares in $\mathrm{hol}_+(N)$ — the domain of holomorphy of $N(z)$ in $\mathbb{C}^+$. We denote this class of functions by $\mathbf{N}_\kappa$. We often extend the domain of definition of $N(z)$ to the open lower half plane $\mathbb{C}^-$ by setting $N(z^*) = N(z)^*$ with $z \in \mathrm{hol}_+(N)$ and by holomorphy to those points of the real axis where this is possible.

We study rational 2×2- matrix functions $\Theta(z)$ which have a pole only in the point z_1^*, that is their entries are polynomials in $1/(z - z_1^*)$, and which are J_ℓ-unitary, that is, satisfy on the real line:

$$\Theta(z) J_\ell \Theta(z)^* = J_\ell, \qquad z \in \mathbb{R}, \qquad J_\ell := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

There the extension of the classical Schur transformation to generalized Schur functions as defined and studied for example, in the papers [3], [4], [5] and [6], played an important role.

In this paper we use the inverse Schur transformation which plays a main role. As fractional linear transformation, this inverse Schur transformation is according to (4) determined by a 2×2-matrix function $\Theta(z)$. The connection between the Schur transformation and factorization of 2×2-matrix functions is based on the fact that for generalized Nevanlinna functions the matrix functions $\Theta(z)$, corresponding to the inverse Schur transformation, are the elementary

J_ℓ-unitary factors. The minimal factorization of a given rational J_ℓ-unitary 2×2-matrix functoin $\Theta(z)$ can be obtained by a repeated application of the Schur transformation which we call the Schur algorithm.

The reproducing kernel Pontryagin space associated with the kernel $L_N(z,w)$ with $z,w \in \mathrm{hol}(N)$ will be denoted by $\mathscr{L}(N)$ and the reproducing kernel Pontryagin space associated with the same kernel but now with $z,w \in \mathrm{hol}_+(N)$ will be denoted by $\mathscr{L}_+(N)$. The spaces coincide if there is a real interval where N is holomorphic:the elements of the one are the analytic continuations of the elements of the other.

In this paper with a given function $N(z) \in \mathbf{N}$ the reproducing kernel Pontryagin space for the kernel $L_N(z,w)$ from (1) is introduced and studied.

Theorems 1 and 2 are obtained from more general results from [10], [4] and [15].

Keywords: *indefinite metrics, Nevanlinna function, Pontryagin space, Schur transformation, reproducing kernel, factorization of rational matrix function.*

Введение

Функция $N(z)$ называется *обобщенной функцией Неванлинны с κ отрицательными квадратами*, если она мероморфна в $\mathbb{C}^+$ и ядро

$$L_N(z,w) = \frac{N(z)-N(w)^*}{z-w^*} \qquad \left(= \frac{(1 \quad -N(z))J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(w)^* \end{pmatrix}}{z-w^*} \right) \tag{1}$$

имеет κ неотрицательных квадратов в $\mathrm{hol}_+(N)$ — области голоморфизма $N(z)$ в $\mathbb{C}^+$. Обозначим этот класс функций $\mathbf{N}_\kappa$. Часто область определения $N(z)$ расширяется на открытую нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}^-$, полагая $N(z^*) = N(z)^*$ для $z \in \mathrm{hol}_+(N)$ по голоморфности в тех точках вещественной оси, где это возможно. Область голоморфности расширенной функции будет обозначаться $\mathrm{hol}(N)$. Ядро $L_N(z,w)$, рассматриваемое в $\mathrm{hol}(N)$, по-прежнему имеет κ отрицательных квадратов (см. [13]). При $\kappa = 0$ класс $\mathbf{N}_0$ состоит из всех *функций Неванлинны.* Это функции $N(z)$, которые являются голоморфными в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ так, что $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset \mathrm{hol}(N)$ и соблюдается условие $N(z^*)^* = N(z)$ и $\mathrm{Im}\,N(z)/\mathrm{Im}\,z \geq 0$ в этом множестве. Мы расширяем класс $\mathbf{N}_0$, добавляя к нему функцию, тождественно равную ∞. Расширенный класс также обозначается $\mathbf{N}_0$, и мы полагаем $\mathbf{N} = \cup_{\kappa\geq 0}\mathbf{N}_\kappa$. Как $\mathbf{N}_\kappa^{z_1}$ мы обозначим класс функций из $\mathbf{N}_\kappa$, которые голоморфны в z_1. Наконец, обозначим $\mathbf{N}^{z_1} = \cup_{\kappa\geq 0}\mathbf{N}_\kappa^{z_1}$. По-прежнему константа ∞ рассматривается как элемент $\mathbf{N}^{z_1}$. Функцию $f(z)$, определенную на подмножестве из $\mathbb{C}$, симметричном относительно вещественной оси, мы будем называть *вещественной*, если $f(z^*) = f(z)^*$. Таким образом, функции Неванлинны являются вещественными, и полином по z является вещественным тогда и только тогда, когда его коэффициенты вещественны.

Напомним, что функция $s(z)$ называется *функцией Шура*, если она определена и голоморфна в открытом единичном диске $\mathbb{D}$ и удовлетворяет условию $|s(z)| \leq 1$ для $z \in \mathbb{D}$. Если $s(z)$ по модулю не равна единичной константе, то ее *преобразование Шура* $\hat{s}(z)$ определяется посредством

$$\hat{s}(z) = \frac{1}{z}\frac{s(z) - s(0)}{1 - s(z)s(0)^*} \tag{2}$$

и также является функцией Шура. Функция $s(z)$ называется *обобщенной функцией Шура с κ отрицательными квадратами*, если она мероморфна в $\mathbb{D}$, и ядро

$$K_s(z, w) = \frac{1 - s(z)s(w)^*}{1 - zw^*}, \quad z, w \in \mathrm{hol}(s),$$

имеет κ отрицательных квадратов. Расширение преобразования Шура (2) для обобщенных функций Шура описано в [1], [10] и [14].
2×2-матричная функция

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} \tag{3}$$

определяет дробное линейное преобразование $\mathscr{T}_{\Theta(z)}$ на множестве комплексных функций $N(z)$ соотношением

$$\mathscr{T}_{\Theta(z)}(N(z)) = \frac{a(z)N(z) + b(z)}{c(z)N(z) + d(z)}. \tag{4}$$

Оно обладает свойствами $\mathscr{T}_{\Theta_1(z)\Theta_2(z)}(N(z)) = \mathscr{T}_{\Theta_1(z)}(\mathscr{T}_{\Theta_2(z)}(N(z)))$ так, что если определена $\Theta(z)^{-1}$, то

$$\mathscr{T}^{-1}_{\Theta(z)}(N(z)) = \mathscr{T}_{\Theta(z)^{-1}}(N(z)).$$

Связь между преобразованием Шура и разложением 2×2-матричных функций основана на том факте, что, по аналогии с преобразованием Шура (2) для обобщенных функций Неванлинны, матричные функции $\Theta(z)$, соответствующие обратному преобразованию Шура, являются элементарными J_ℓ-унитарными множителями. Следовательно, минимальное разложение данной рациональной J_ℓ-унитарной 2×2-матричной функции $\Theta(z)$ может быть получено путем многократного применения преобразования Шура, что мы называем алгоритмом Шура.

Для данной функции $N(z) \in \mathbf{N}^{z_1}$ мы введем два дробных линейных преобразования $\widehat{N}_S(z)$, $\widehat{N}(z)$, связанные простым соотношением $\widehat{N}_S(z) = -\widehat{N}(z)^{-1}$. $\widehat{N}_S(z)$

формально подобно классическому преобразованию Шура (2), однако $\widehat{N}(z)$ для наших целей оказывается более подходящим. Поэтому в данной статье мы называем $\widehat{N}(z)$ *преобразованием Шура для обобщенных функций Неванлинны.*

Пусть $z_1 \in \mathbb{C}^+$ — фиксирована. Рассмотрим функцию $N(z) \in \mathbf{N}^{z_1}$, которая не равна вещественной константе или ∞, и обозначим ее коэффициенты Тейлора в точке z_1, как ν_j, $j = 0, 1, 2, ...$:

$$N(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j (z - z_1)^j. \tag{5}$$

С $N(z)$ связаны два дробных линейных преобразования [10]:

$$\widetilde{N}_S(z) = \frac{N(z) - \alpha(z)}{|\nu_0|^2 - \beta(z)N(z)}, \tag{6}$$

$$\widetilde{N}(z) = \frac{\beta(z)N(z) - |\nu_0|^2}{N(z) - \alpha(z)}; \tag{7}$$

очевидно, что $\widetilde{N}(z) = -1/\widetilde{N}_S(z)$. Функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$, используемые в (6) и (7), зависят от условия $\operatorname{Im} \nu_0 \neq 0$ или $\operatorname{Im} \nu_0 = 0$.

Случай $Im \nu_0 \neq 0$:

В этом случае функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ линейны и определяются следующим образом:

$$\alpha(z) = \frac{\nu_0(z - z_1^*) - \nu_0^*(z - z_1)}{z_1 - z_1^*} = \nu_0 + \frac{\nu_0 - \nu_0^*}{z_1 - z_1^*}(z - z_1), \tag{8}$$

$$\alpha(z) = \frac{\nu_0^*(z - z_1^*) - \nu_0(z - z_1)}{z_1 - z_1^*} = \nu_0^* - \frac{\nu_0 - \nu_0^*}{z_1 - z_1^*}(z - z_1). \tag{9}$$

Случай $Im \nu_0 = 0$:

В этом случае сначала определим вещественный полином $p(z)$. Так как $N(z)$ тождественно не равна вещественной константе, существует наименьшее $k \geq 1$, при котором $\nu_k \neq 0$. Определим формально комплексные числа a_j по

$$(N(z) - \nu_0) \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_1)^j = (z - z_1)^k (z - z_1^*)^k, \tag{10}$$

в частности,

$$a_j \nu_k + a_{j-1}\nu_{k+1} + \cdots + a_0 \nu_{k+j} = \binom{k}{j} (z - z_1^*)^{k-j}, \quad j = 0, 1, ..., k. \tag{11}$$

В качестве $p(z)$ определим полином

$$p(z) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j (z - z_1)^j + \sum_{j=k}^{2k-1} b_j (z - z_1)^j \tag{12}$$

степени $\leq 2k-1$, где коэффициенты a_0, a_1,...,a_{k-1} вычисляются по (10), а коэффициенты b_j, $j = k, k+1, ..., 2k-1$, определяются из условия $p(z^*) = p(z)^*$. Благодаря этому свойству $p(z)$, коэффициенты b_j и, следовательно, $p(z)$ определены однозначно. Покажем это. Из (12) и требования $p(z) = p(z^*)^*$ получаем

$$\sum_{j=k}^{2k-1} b_j (z - z_1)^j = \sum_{j=0}^{k-1} a_j^* (z - z_1^*)^j - \sum_{j=0}^{k-1} a_j (z - z_1)^j + \sum_{j=k}^{2k-1} b_j^* (z - z_1^*)^j.$$

Беря i-ые производные от обеих частей, $i = 0, 1, ..., k-1$, и вычисляя их в z_1^*, получаем систему k уравнений с k неизвестными b_k, b_{k+1},...,b_{2k-1}:

$$\sum_{j=k}^{2k-1} b_j \frac{j!}{(j-i)!} (z_1^* - z_1)^{j-i} = i! a_i^* - \sum_{j=i}^{k-1} a_j \frac{j!}{(j-i)!} (z_1^* - z_1)^{j-i}, \quad i = 0, 1, ..., k-1.$$

Так как матрица коэффициентов этой системы является обратимой, эти неизвестные определяются однозначно. Наконец, определим функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ следующим образом:

$$\alpha(z) = \nu_0 + \frac{(z - z_1)^k (z - z_1^*)^k}{p(z)}, \qquad \beta(z) = \nu_0 - \frac{(z - z_1)^k (z - z_1^*)^k}{p(z)}. \tag{13}$$

В статье вводится и изучается пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром $L_N(z, w)$ из (1) для заданной функции $N(z) \in \mathbf{N}$.

1. Обратное преобразование Шура

Далее описывается не преобразование Шура, а обратное преобразование, которое играет значимую роль. Как и дробное линейное преобразование, это обратное преобразование Шура определено, согласно (4), для 2×2-матричной функции $\Theta(z)$, которую мы сейчас рассмотрим. Для заданной функции $N(z) \in \mathbf{N}$, не являющейся линейной и не имеющей вид $N(z) = \alpha(z)$, функцию $\widetilde{N}(z)$ запишем в виде:

$$N(z) = \mathscr{T}_{\Psi(z)}(\widetilde{N}(z)).$$

Второе преобразование — удаление возможного полюса $\widetilde{N}(z)$ в z_1:

$$\widetilde{N}(z) = \mathscr{T}_{\widetilde{\Psi}(z)}(\widehat{N}(z));$$

здесь, понятно, $\widetilde{\Psi}(z)$ — единичная матрица I_2 размером 2×2, если функция $\widetilde{N}(z)$ голоморфна в z_1. Теперь обратное преобразование Шура может быть записано, как

$$N(z) = \mathscr{T}_{\Psi(z)}(\widetilde{N}(z)) = \mathscr{T}_{\Psi(z)}(\mathscr{T}_{\widetilde{\Psi}(z)}(\widehat{N}(z))) = \mathscr{T}_{\Theta}(z)(\widehat{N}(z)) \tag{14}$$

для

$$\Theta(z) = \Psi(z)\widetilde{\Psi}(z).$$

Такая матричная функция $\Theta(z)$ называется *матрица коэффициентов, связанная с обратным преобразованием Шура для* $N(z)$.

Обратное преобразование Шура может быть записано в виде:

$$N(z) = \frac{\alpha(z)(\widehat{N}(z) + h(z) + h(z^*)^*) - |\nu_0|^2}{\widehat{N}(z) + h(z) + h(z^*)^* - \beta(z)},$$

где функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ зависят от того, соблюдается ли $\operatorname{Im} N(z_1) \neq 0$ или $\operatorname{Im} N(z_1) = 0$ (см. (8), (9) и (13)). Теперь нетрудно видеть, что матрицы $\Psi(z)$ и $\widetilde{\Psi}(z)$ могут быть выбраны следующим образом; здесь и далее мы полагаем

$$b_\ell(z) = \frac{z - z_1}{z - z_1^*}.$$

Случай $Im\, \nu_0 \neq 0$:

$$\Psi(z) = \left(I_2 + (b_\ell(z) - 1)\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^* J_\ell}{\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u}}\right), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nu_0^* \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{15}$$

видно, что $\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u} = \nu_0 - \nu_0^* \neq 0$

Случай $Im\, \nu_0 = 0$:

$$\Psi(z) = \left(b_\ell(z)^k I_2 - \frac{p(z)}{(z - z_1^*)^{2k}}\mathbf{u}\mathbf{u}^* J_\ell\right), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{16}$$

видно, что в этом случае $\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u} = \nu_0 - \nu_0^* = 0$.

Наконец, в обоих случаях для матрицы $\widetilde{\Psi}(z)$ имеем: $\widetilde{\Psi}(z) = I_2$, если $\widetilde{N}(z)$ голоморфна в z_1, иначе

$$\widetilde{\Psi}(z) = \begin{pmatrix} 1 & h(z) + h(z^*)^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b_\ell(z)^q, \tag{17}$$

где q — порядок полюса $\widetilde{N}(z)$ в точке z_1 и $h(z)$ — главная часть ряда Лорана для $\widetilde{N}(z)$ в z_1. Обратите внимание, что элементы $\Psi(z)$ имеют полюс только в z_1^*, и скалярный множитель $b_\ell(z)^q$ в определении $\widetilde{\Psi}(z)$ гарантирует, что все элементы этой матрицы обладают таким же свойством. Матричная функция в (16) является аналогом матричной функции, впервые предложенной Шамфи [9] в случае окружности.

Следующая теорема содержит некоторую информацию о преобразованиях с матричной функцией вида (16).

Теорема 1. *Пусть* $\Theta(z)$ *имеет вид*

$$\Theta(z) = b_\ell(z)^k I_2 - \frac{p(z)}{(z-z_1^*)^{2k}}\mathbf{u}\mathbf{u}^* J_\ell, \quad 0 \neq \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{C}, \ ab^* = a^* b,$$

где k *— целое,* $k \geq 1$, $p(z)$ *— вещественный полином степени не больше* $2k-1$ *и* $p(z_1) \neq 0$. *Пусть* $N_1(z) \in \mathbf{N}$, $N_1(z) \not\equiv \infty$ *и пусть* $N_2(z) = \mathscr{T}_{\Theta(z)}(N_1(z))$

1. *Если* $N_2(z)$ *имеет полюс в* z_1, $N_1(z)$ *голоморфна в* z_1 *и* $bN_1(z_1) \neq a$, *то* $b = 0$, *следовательно,* $a \neq 0$ *и*

$$N_1(z) = N_2(z) + \frac{|a|^2 p(z)}{(z-z_1)^k (z-z_1^*)^k}, \tag{18}$$

при этом $\dfrac{-|a|^2 p(z)}{(z-z_1)^k (z-z_1^*)^k}$ *является суммой главных частей* $N_2(z)$ *в точках* z_1 *и* z_1^*.

2. *Если* $N_2(z)$ *голоморфна в* z_1 *и имеет разложение в ряд Тейлора*

$$N_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j (z-z_1)^j, \quad \nu_j \in \mathbb{C},$$

и $N_1(z)$ *либо имеет полюс в* z_1 *и не имеет вид* (18), *либо голоморфна в* z_1 *и* $bN_1(z_1) \neq a$, *то* $b \neq 0$, $\nu_0 = a/b$, $\nu_1 = ... = \nu_{k-1} = 0$, $\nu_k \neq 0$ *и* $|b|^2 p(z)$ *получается из* $N_2(z)$ *по* (10) *при замене* $N(z)$ *на* $N_2(z)$; *тогда однозначно определен вещественный полином степени не более* $2k-1$ *такой, что* $|b|^2 p^{(j)}(z_1) = j! a_j$, $j = 0, 1, ..., k-1$.

В пункте 1) теоремы функции $N_1(z)$ и $N_2(z)$ связаны с функциями $\widehat{N}(z)$ и $\widetilde{N}(z)$ соответственно в определении преобразования Шура: предположение, что последняя последняя функция имеет полюс в z_1 подразумевает, что $\Theta(z)$ имеет вид $\widetilde{\Psi}(z)$. В пункте 2) обе функции связаны с $\widetilde{N}(z)$ и $N(z)$ соответственно: в определении преобразования Шура, если $\widetilde{N}(z)$ голоморфна в z_1, то [10]

$$\widetilde{N}(z_1) = \nu_0 - \frac{(z_1 - z_1^*)^k}{b_k - a_k} \neq \nu_0,$$

что соответствует предположению $bN_1(z_1) \neq a$; если $\widetilde{N}(z)$ имеет полюс в z_1, то можно показать, что $\widehat{N}(z) \neq N(z)$, что соответствует предположению о том, что (18) не выполняется.

Доказательство. Равенство $N_2(z) = \mathscr{T}_{\Theta(z)}(N_1(z))$ полностью выглядит, как

$$N_2(z) = \frac{[(z-z_1)^k(z-z_1^*)^k - ab^*p(z)]N_1(z) - |a|^2p(z)}{|b|^2p(z)N_1(z) + [(z-z_1)^k(z-z_1^*)^k - a^*bp(z)]}.$$

1) Если $b \neq 0$, то $a/b \in \mathbb{R}$, и знаменатель равен

$$|b|^2p(z)(N_1(z) - a/b) + (z-z_1)^k(z-z_1^*)^k.$$

Так как $p(z_1) \neq 0$ и $N_1(z_1) \neq a/b$, то знаменатель не имеет нуля при $z = z_1$, что противоречит предположению о том, что $N_2(z)$ имеет полюс в этой точке. Следовательно, $b = 0$, и формула (18) для $N_2(z)$ отсюда легко получается.

2) Если $b = 0$, то формула (18) справедлива, что противоречит предположению о том, что $N_2(z)$ голоморфна в z_1, если $N_1(z)$ голоморфна в z_1, и предположению, что (18) не справедлива, если $N_1(z)$ имеет полюс в z_1. Следовательно, $b \neq 0$, $a/b \in \mathbb{R}$ и

$$|b|^2p(z)(N_2(z) - a/b) = (z-z_1)^k(z-z_1^*)^k \left(1 - \frac{N_2(z) - a/b}{N_1(z) - a/b}\right).$$

Так как $N_1(z) - a/b$ имеет полюс в z_1 или, если голоморфна в z_1, не имеет нуля в этой точке, то правая часть равна $O\left((z-z_1)^k\right)$ при $z \to z_1$, и, следовательно, коэффициенты ряда Тейлора $\nu_0, ..., \nu_k$ для $N_2(z)$ имеют свойства, описанные в пункте 2) теоремы. На основании вышеописанного равенства следует, что

$$|b|^2p(z)(N_2(z) - a/b) = (z-z_1)^k(z-z_1^*)^k + O\left((z-z_1)^{2k}\right), \quad z \to z_1,$$

и мы получаем, что $|b|^2p^{(j)}(z_1) = j!a_j$, $j = 0, 1, ..., k-1$ для a_j из (10). □

2. Пространства $\mathscr{L}(N)$

Напомним определение ядра $L_N(z, w)$ из соотношения (1)

$$L_N(z,w) = \frac{N(z) - N(w)^*}{z - w^*} \quad \left(= \frac{\begin{pmatrix} 1 & -N(z) \end{pmatrix} J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(w)^* \end{pmatrix}}{z - w^*} \right)$$

Пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром, связанное с ядром $L_N(z, w)$ для $z, w \in \mathrm{hol}(N)$ будет обозначаться $\mathscr{L}(N)$. Пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром, связанное с таким же ядром для $z, w \in \mathrm{hol}_+(N)$ будет обозначаться

$\mathscr{L}_+(N)$. Эти пространства "равны", если существует вещественный интервал, где N голоморфно: элементы первого являются аналитическими продолжениями элементов второго. Сначала приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $N(z) \in \mathbf{N}$ имеет вид $\alpha(z)$ из (8) так, что $N(z) = a + bz$ для $a, b \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$. Тогда имеем

$$L_N(z,w) = \frac{N(z) - N(w)^*}{z - w^*} = b = \frac{\nu_0 - \nu_0^*}{z_1 - z_1^*}, \quad \nu_0 = N(z_1).$$

Тогда для любого $w \in \mathbb{C}$

$$b = L_N(w,w) = \langle L_N(z,w), L_N(z,w)\rangle_{\mathscr{L}(N)} = b^2 \langle 1, 1\rangle_{\mathscr{L}(N)}.$$

Это значит, что $\mathscr{L}(N)$ равно $\mathbb{C}$, в котором определенно внутреннее произведение

$$\langle \alpha, \beta\rangle_{\mathscr{L}(N)} = \frac{\beta^*\alpha}{b}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

которое является положительно определенным при $\operatorname{Im}\nu_0 > 0$ и отрицательно определенным при $\operatorname{Im}\nu_0 < 0$.

Если, с другой стороны, $N(z) \in \mathbf{N}$ имеет вид

$$N(z) = a + \frac{b}{\lambda_0 - z}$$

для $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$, то подобные вычисления дают

$$b = |\lambda_0 - z_1|^2 \frac{\nu_0 - \nu_0^*}{z_1 - z_1^*}, \quad \nu_0 = N(z_1),$$

и $\mathscr{L}(N)$ является линейным пространством функций $\alpha/(\lambda_0 - z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ с внутренним произведением

$$\left\langle \frac{\alpha}{\lambda_0 - z}, \frac{\beta}{\lambda_0 - z}\right\rangle_{\mathscr{L}(N)} = \frac{\beta^*\alpha}{b}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

которое опять является положительно определенным при $\operatorname{Im}\nu_0 > 0$ и отрицательно определенным при $\operatorname{Im}\nu_0 < 0$. Таким образом, в данном случае тоже $\dim \mathscr{L}(N) = 1$. Можно показать, что пространство $\mathscr{L}(N)$ имеет размерность, равную 1, тогда и только тогда, когда $N(z)$ имеет один из рассмотренных в примере видов.

Пример 2. Пусть $N(z)$ представлено в виде $\alpha(z)$ из (13):

$$N(z) = \nu_0 + \frac{(z-z_1)^k(z-z_1^*)^k}{p(z)},$$

где ν_0 вещественно, k — целое, $k \geq 1$, и $p(z)$ — вещественный полином степени максимум $2k-1$ такой, что $p(z_1) \neq 0$. Пусть

$$M(z) = -1/(N(z)-\nu_0) = -\frac{p(z)}{(z-z_1)^k(z-z_1^*)^k} = h(z) + h(z^*)^*,$$

где $h(z)$ —главная часть ряда Лорана для $M(z)$ в точке z_1:

$$h(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{h_j}{(z-z_1)^j}$$

для $h_j \in \mathbb{C}$ и $h_k \neq 0$. Из

$$L_N(z,w) = (N(z)-\nu_0)L_M(z,w)(N(w)-\nu_0)^*$$

мы видим, что $M(z)$ является обобщенной функцией Неванлинны с тем же числом отрицательных квадратов, что и у $N(z)$, и оператор умножения на $(N(z)-\nu_0)$ является унитарным отображением из $\mathscr{L}(M)$ на $\mathscr{L}(N)$. Следовательно, этого достаточно для описания пространства $\mathscr{L}(M)$ (см., например, [8, теорема 1.5.7]). Мы выяснили, что это пространство натянуто на $2k$ линейно независимых функций

$$f_j(z) = \frac{1}{(z-z_1)^j}, \quad f_{k+j}(z) = \frac{1}{(z-z_1^*)^j}, \qquad j = 1, 2, ..., k,$$

и что матрица Грамма (Gram) G этих функций:

$$G = (g_{m,n})_{m,n=1}^{2k}, \quad g_{m,n} = \langle f_n(z), f_m(z) \rangle_{\mathscr{L}(M)}$$

определяется посредством

$$G = \begin{pmatrix} 0 & H^* \\ H & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_k \\ h_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Поэтому пространство $\mathscr{L}(M)$ и, следовательно, $\mathscr{L}(N)$ являются пространствами Понтрягина размерности $2k$ с отрицательным индексом, равным k.

Для последующих примеров и далее обозначим как $\mathbf{H}_2$ пространство Харди (Hardy) в $\mathbb{C}^+$ так, что гильбертово пространство скалярных функций, аналитических в $\mathbb{C}^+$, имеет воспроизводящее ядро

$$(z,w) \mapsto \frac{1}{-2\pi i(z-w^*)},$$

и как $\mathbf{H}_2^2$ пространство 2-векторных функций с элементами из $\mathbf{H}_2$ с внутренним произведением

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{H}_2^2} = \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathbf{H}_2} + \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathbf{H}_2}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Пространство $\mathbf{H}_2^2$, имеющее индефинитное внутреннее произведение

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{H}_{2,J_\ell}} = \langle -iJ_\ell \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{H}_2^2},$$

будет обозначаться как $\mathbf{H}_{2,J_\ell}$. Это пространство Крейна с воспроизводящим ядром

$$(z,w) \mapsto \frac{J_\ell}{2\pi(z-w^*)}.$$

Наконец, пространство Харди $\mathbf{H}_2^-$ в $\mathbb{C}^-$ является гильбертовым пространством функций, аналитических в $\mathbb{C}^-$, с воспроизводящим ядром

$$(z,w) \mapsto \frac{1}{2\pi i(z-w^*)}.$$

Пример 3. Пространство $\mathscr{L}(N)$, соответствующее функции $N(z) = \pm i$, $z \in \mathbb{C}^\pm$, может быть описано следующим образом: $f \in \mathscr{L}(N)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $f_+ \in \mathbf{H}_2$ и $f_- \in \mathbf{H}_2^-$ такие, что

$$f|_{\mathbb{C}_+} = f_+ \quad \text{и} \quad f|_{\mathbb{C}_-} = f_-.$$

Кроме того,

$$||f||^2_{\mathscr{L}(N)} = \frac{1}{4\pi}(||f_+||^2_{\mathbf{H}_2} + ||f_-||^2_{\mathbf{H}_2^-}). \tag{19}$$

В частности, $\mathscr{L}_+(i) = \mathbf{H}_2$ как линейные пространства.

Чтобы убедиться в этом, обозначим за $\mathscr{H}$ гильбертово пространство функций f в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, для которых справедливо $f_+ := f|_{\mathbb{C}_+} \in \mathbf{H}_2$ и $f_- := f|_{\mathbb{C}_-} \in \mathbf{H}_2^-$, имеющее норму

$$||f||^2_{\mathscr{H}} = \frac{1}{4\pi}(||f_+||^2_{\mathbf{H}_2} + ||f_-||^2_{\mathbf{H}_2^-}).$$

Функция $L_N(z,w)$ является элементом $\mathscr{H}$ и

$$(L_N)_\pm(z,w) = \begin{cases} \pm 2i/(z-w^*), & w \in \mathbb{C}^\pm, \\ 0, & w \in \mathbb{C}^\mp. \end{cases}$$

Непосредственные вычисления отдельно для $w \in \mathbb{C}^+$ и для $w \in \mathbb{C}^-$ дают

$$\langle f, L_N(z,w)\rangle_{\mathscr{H}} = f(w), \quad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Следовательно, $L_N(z,w)$ является воспроизводящим ядром для $\mathscr{H}$ и, поэтому, $\mathscr{H} = \mathscr{L}(N)$.

Пример 4. Напомним, что $N(z) \in \mathbf{N}_0$ имеет интегральное представление

$$N(z) = a + bz + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\sigma(t), \quad z \in \mathrm{hol}(N). \tag{20}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ и $\sigma(t)$ — неубывающая функция с

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(t)}{t^2+1} < \infty.$$

Имеем:

$$\mathscr{L}(N) = \Big\{ F(z) = b\varphi + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t)d\sigma(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad | \quad f \in \mathbf{L}_2(d\sigma), \varphi \in \mathbb{C} \Big\}.$$

Доказательство этого равенства см. [16] и [11]. Хорошо известно, что линейная оболочка функций

$$t \mapsto \frac{1}{t-w}, \quad t \in \mathbb{R},$$

для $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ плотна в $\mathbf{L}_2(d\sigma)$. Если как $\mathbf{H}_2(d\sigma)$ обозначим замыкание этих функций в $\mathbf{L}_2(d\sigma)$ при ограничении w полуплоскостью $\mathbb{C}^+$, то

$$\mathscr{L}_+(N) = \Big\{ F(z) = b\varphi + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t)d\sigma(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \quad | \quad f \in \mathbf{H}_2(d\sigma), \varphi \in \mathbb{C} \Big\}.$$

В обоих случаях норма функции $F(z)$ определяется выражением $||F||^2 = b|\varphi|^2 + ||f||^2_{\mathbf{L}_2(d\sigma)}$.

2. Пусть $N(z)$ — обобщенная функция Неванлинны. Из общей теории (см.,

например, [1, теорема 2.3.5]) известно, что функции

$$z \mapsto \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} L_N(z,w)\Big|_{w=w_0} = \begin{pmatrix}1 & -N(z)\end{pmatrix} \left(\frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} \frac{J_\ell \begin{pmatrix}1\\ -N(w)^*\end{pmatrix}}{z-w^*}\Bigg|_{w=w_0} \right), \quad j=0,1,2,...,$$

где $w_0 \in \mathrm{hol}(N)$, принадлежат $\mathscr{L}(N)$. Обозначим линейную оболочку функций в больших скобках как $\mathscr{M}(w_0)$. Отметим, что $\mathscr{M}(w_0)$ является инвариантным по отношению к оператору разделенной разности R_0

$$R_0\mathbf{f}(z) = \frac{\mathbf{f}(z)-\mathbf{f}(0)}{z}.$$

Теорема 2. *Для $N(z) \in \mathbf{N}^{z_1}$ выполняется следующие равенства:*

$$\mathscr{L}(N) = \overline{\mathrm{span}}\Big\{ \begin{pmatrix}1 & -N\end{pmatrix} \mathscr{M}(z_1), \begin{pmatrix}1 & -N\end{pmatrix} \mathscr{M}(z_1^*)\Big\}, \tag{21}$$

$$\mathscr{L}_+(N) = \overline{\mathrm{span}}\Big\{ f\big|_{\mathbb{C}_+} \ \Big| f \in \begin{pmatrix}1 & -N\end{pmatrix} \mathscr{M}(z_1)\Big\}. \tag{22}$$

Кроме того, отображение $\mathbf{f}(z) \mapsto \sqrt{2\pi}\begin{pmatrix}1 & -N(z)\end{pmatrix}\mathbf{f}(z)$является изометрией из линейного многообразия $\mathscr{M}(z_1)$, имеющее внутреннее произведение $\mathbf{H}_{2,J_\ell}$, на плотное линейное многообразие из $\mathscr{L}_+(N)$.

Доказательство. Если $f(z) \in \mathscr{L}(N)$ является ортогональной пространству в правой части (21), тогда для всех $j \in \mathbb{N}$

$$f^{(j)}(z_1) = \left\langle f(z), \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} L_N(z,w)\Big|_{w=z_1} \right\rangle_{\mathscr{L}(N)} = 0,$$

$$f^{(j)}(z_1^*) = \left\langle f(z), \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} L_N(z,w)\Big|_{w=z_1^*} \right\rangle_{\mathscr{L}(N)} = 0,$$

и, следовательно, $f \equiv 0$. Это доказывает (21). Равенство (22) может быть доказано аналогично.

Обозначим через $\mathbf{f}_j(z)$ функции

$$\mathbf{f}_j(z) = \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} \frac{\begin{pmatrix}N(w)^*\\ 1\end{pmatrix}}{z-w^*}\Bigg|_{w=z_1}, \quad j=0,1,.... \tag{23}$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \sqrt{2\pi}\begin{pmatrix}1 & -N\end{pmatrix}\mathbf{f}_k, \sqrt{2\pi}\begin{pmatrix}1 & -N\end{pmatrix}\mathbf{f}_j \right\rangle_{\mathscr{L}_+(N)} \\
&= 2\pi \left\langle \frac{\partial^k}{\partial w^{*k}} L_N(\cdot, w)\Big|_{w=z_1}, \frac{\partial^j}{\partial v^{*j}} L_N(\cdot, v)\Big|_{v=z_1} \right\rangle_{\mathscr{L}_+(N)} \\
&= 2\pi \frac{\partial^{k+j}}{\partial v^j w^{*k}} L_N(v,w)\Big|_{v=w=z_1} \\
&= 4\pi^2 \frac{\partial^{k+j}}{\partial v^j w^{*k}} \left\langle \frac{J_\ell \begin{pmatrix}1 \\ -N(w)^*\end{pmatrix}}{2\pi(\cdot - w^*)}, \frac{J_\ell \begin{pmatrix}1 \\ -N(v)^*\end{pmatrix}}{2\pi(\cdot - v^*)} \right\rangle_{\mathbf{H}_{2,J_\ell}} \Bigg|_{v=w=z_1} \\
&= \langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k \rangle_{\mathbf{H}_{2,J_\ell}}.
\end{aligned}
$$

Последнее равенство получается из нижеследующей леммы 1 для $A(z) = \begin{pmatrix}1 & -N(z)\end{pmatrix}$ и

$$K_1(z,w) = K_2(z,w) = \frac{J_\ell}{2\pi(z - w^*)}.$$

□

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{H}(K_1)$ и $\mathscr{H}(K_2)$ — пространства Крейна с воспроизводящими матричными ядрами $K_j(z,w)$ размером $n_j \times n_j$, $j = 1, 2$, являющиеся аналитическими в некоторой общей области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Предположим, что $A(z)$ — аналитическая матричная функция на Ω размером $n_2 \times n_1$ такая, что отображение M_A: $f(z) \mapsto A(z)f(z)$ является ограниченным оператором из $\mathscr{H}(K_1)$ в $\mathscr{H}(K_2)$. Тогда*

$$M_A^* \left(\frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} K_2(z,w) \right) = \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} (K_1(z,w)A(w)^*), \quad j = 0, 1, ...$$

Доказательство может быть получено путем вычисления внутреннего произведения функций в обеих частях равенства для функции $f(z) \in \mathscr{H}(K_1)$. Для $j = 0$ — это хорошо известный результат со множителями, получаемый без условия аналитичности (см., например, [1, сс. 28–29] для доказательства).

Заключение

В работе исследуются свойства индефинитных функций Неванлинны $N(z)$. В этом контексте каждой такой функции ставится в соответствие пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром $L_N(z, \omega)$, порождённым рациональной матричной функцией $\Theta(z)$. Подробно изучается понятие обратного преобразования Шура для обобщенных функций класса Неванлинны. Связь между преобразованием Шура и разложением 2×2-матричных функций основана на том факте, что для обобщенных функций Неванлинны матричные функции $\Theta(z)$, соответствующие обратному преобразованию Шура, являются элементарными J_ℓ-унитарными множителями. Минимальное разложение данной рациональной J_ℓ-унитарной 2×2-матричной функции $\Theta(z)$ может быть получено путем многократного применения преобразования Шура, что мы называем алгоритмом Шура. Основной результат статьи получен путём многократного применения преобразования Шура и обратного преобразования Шура к матричным рациональным функциям, связанными с функциями Неванлинны.

Список литературы

1. ALPAY, D. & DIJKSMA, A. & LANGER, H. (2007) The transformation of Issai Schur and related topics in indefinite setting . *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 176.). p. 1–98.

2. ALPAY D. & DYM H. (1993) On a new class of reproducing kernel spaces and a new generalization of the Iohvidov laws. *Linear Algebra Applications.* (Vol.178). p. 109–183.

3. ALPAY D. & DYM H. (1996) On a new class of realization formulas and their applications. *Linear Algebra Applications.* (Vol. 241-243). p. 3–84.

4. ALPAY D. & GOHBERG I. (1988) Unitary rational matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 33). p. 175-222.

5. ALPAY D. & GOHBERG I. (2006) Discrete analogs of canonical systems with pseudoexponential potential. Definitions and formulas for he spectral matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 161). p. 1–47.

6. ANDREISHCHEVA E. (2006) Approximation of Generalized Schur functions. *International Conference "Sixth Workshop Operator Theory in Krein Spaces and Operator Polynomials": Book of abstracts.* Berlin. p. 10–11.

7. DE BRANGES L. (1963) Some Hilbert spaces of analytic functions I. *Trans.Amer.Math.Soc..* (Vol. 106). p. 445–468.

8. DE BRANGES L. & ROVNYAK J. (1966) Canonical models in quantum scattering theory. *Wiley.* New York. p. 295–392.

9. CHAMFY C. (1958) Fonctions méromorphes sur le cercle unité et leurs séries de Taylor,. *Ann. Inst. Fourier.* Vol.76. p. 211–251.

10. DIJKSMA A. & LANGER H. & LUGER A. & SHONDIN Y. (2004) Minimal realizations of scalar generalized Nevanlinna functions related to their basic factorization. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 154). p. 69–90.

11. DYM H. (1989) On reproducing kernel spaces, J-unitary matrix functions, interpolation and displacement rank. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 41). p. 173-239.

12. GOHBERG I. (1986) Schur methods in operator theory and signal processing. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 18). p. 30-77.

13. IOHVIDOV I. S. & KREIN M. G. & LANGER H. (1982) Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric. *Mathematical Research, Akademie-Verlag.* Berlin (Band 9). p. 120.

14. JONAS P. (1981) On the functional calculus and the spectral function for definizable operators in Krein space . *Beitrage Anal..* (Vol.16). p. 121–135.

15. KREIN M. G. (1970) Über die verallgemeinerte Rezolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators in Raume Π_κ . *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai..* Tihany (Hungary) (Vol.5). p. 353–399.

16. KREIN M. G. & LANGER H. (1977) Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen. *Math. Nachr..* (Vol.77). p. 187–236.

17. KREIN M. G. & LANGER H. (1981) Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ . *Acta Sci. Math. Szeged.* (Vol. 43). p. 181–205.

18. LANGER H. (1982) Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces. *Lecture Notes in Mathematics.* (№948). p. 1–46.

19. SCHUR I. (1986) Über die Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises änkt sind. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 18). p. 31–59.