УДК: 517.9

MSC2010: 00A72 **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-65-80**

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© К. А. Раецкий

Воронежский государственный университет
математический факультет
кафедра математического анализа
Университетская площадь, 1, Воронеж, 394000, Российская Федерация
e-mail: *kraetsky@mail.ru*

Construction of a motion model of a linear dynamic system with multi-point conditions.

Raetsky K. A.

Abstract.

A model of motion of a dynamic system with the condition that the trajectory passes through arbitrarily specified points at arbitrarily specified times is constructed. The simulated motion occurs at the expense of the input vector-function, calculated for the first time by the method of indefinite coefficients. The proposed method consists in the formation of the vector function of the trajectory of the system and the input vector function in the form of linear combinations of scalar fractional rational functions with undefined vector coefficients. To change the shape of the trajectory to the specified linear combinations, an exponential function with a variable exponent is introduced as a factor.

To determine the vector coefficients, the formed linear combinations are substituted directly into the equations describing the dynamic system and into the specified multipoint conditions. As a result, a linear algebraic system is formed.

The resulting algebraic system has coefficients at the desired parameters only matrices included in the Kalman condition of complete controllability of the system, and similar matrices with higher degrees.

It is proved that the Kalman condition is sufficient for the solvability of the resulting algebraic system. To form an algebraic system, the properties of finite-dimensional mappings are used: decomposition of spaces into subspaces, projectors into subspaces, semi-inverse operators. For the decidability of the system, the Taylor formula is applied to the main determinant.

For the practical use of the proposed method, it is sufficient to solve the obtained algebraic system and use the obtained linear formulas. The conditions for complete controllability of the linear dynamic system are satisfied. To prove this fact, we use the properties of finite-dimensional mappings. They are used in the decomposition of spaces into subspaces, in the construction of projectors into subspaces, in the construction of semi-inverse matrices. The process of using these properties is demonstrated when solving a linear equation with matrix coefficients of different dimensions with two vector unknowns.

A condition for the solvability of the linear equation under consideration is obtained, and this condition is equivalent to the Kalman condition. In order to theoretically substantiate the solvability of a linear algebraic system, to determine the sought vector coefficients, the solvability of an equivalent system of linear equations is proved. In this case, algebraic systems arise with the main determinant of the following form: the first few lines are lines of the Wronsky determinant for exponential-fractional-rational functions participating in the construction of the trajectory of motion at the initial moment of time; the next few lines are the lines of the Wronsky determinant for these functions at the second given moment in time, and so on. The number of rows is also related to the Kalman condition - it is the number of matrices in the full rank controllability matrix. Such a determinant for the exponential-fractional-rational functions under consideration is nonzero.

The complexity of proving the existence of the trajectory and the input vector function in a given form for the system under consideration is compensated by the simplicity of the practical solution of the problem.

Due to the non-uniqueness of the solution to the problem posed, the trajectory of motion can be unstable. It is revealed which components of the desired coefficients are arbitrary and they should be fixed to obtain motion with additional properties.

Keywords: *dynamical system, multipoint motion model, undetermined coefficients method, process implementation.*

Введение

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $v(t) \in \mathbb{R}^m$, A и B — матрицы соответствующих размеров, $t \in [t_0, t_k]$, $\nexists B^{-1}$. Вектор-функцию $x(t)$ называют состоянием, траекторией системы, $v(t)$ — входная вектор-функция, вход.

Такими системами моделируются динамические процессы в биологии (изменение численности популяции зверьков и др. [1]), в медицине (распространение инфекционных заболеваний [2], [3] и др.), в экономике (динамическая модель межотраслевого баланса [1], [4] и др.), в электротехнике ([3] и др.); механические движения, описываемые основными законами динамики [3], [5] и мн. др.

Известно [6], что полным условием возможности перевода состояния системы (1) из произвольного начального состояния

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

в произвольное конечное состояние

$$x(t_k) = x_k \tag{3}$$

за произвольный промежуток времени $t \in [t_0, t_k]$, то есть существование входной вектор-функции $v(t)$ такой, что состояние $x(t)$ системы с реализованной этой вектор-функцией и реализованным начальным состоянием (2) примет в момент t_k именно значение x_k, является условие

$$\operatorname{rank}(B\,AB\,...\,A^{n-1}B) = n. \tag{4}$$

Это условие использовал акад. Крылов Н.Н. [7] при рассчетах кораблестроительных систем, акад. Понтрягин Л. Д. [8]. Позже, после доклада Р.Калмана на конгрессе IFAC в 1959 г. это условие было названо условием Калмана [9].

Начиная с 1960 г. появилось огромное количество научно-исследовательских работ и практических решений задачи (1)-(3) нахождения входа $v(t)$ для существования или для нахождения соответствующего состояния $x(t)$. Как правило, практическое решение поставленной задачи осуществляется лишь приближенными методами. Нам известны лишь два метода построения $v(t)$ и $x(t)$ для задачи (1)-(3) в аналитическом виде:

1) построение [5] по формулам

$$W = \int\limits_0^{t_1} e^{-sA}BB^*e^{sA^*}ds, \quad z = W^{-1}\left(e^{-t_1A}x_1 - x_0\right),$$

$$v(t) = B^*e^{tA^*}z, \quad x(t) = e^{tA}x_0 + e^{tA}\int\limits_0^t e^{-sA}Bv(s)ds;$$

2) метод каскадной декомпозиции [10] – [13].

Недостатками первого метода является наличие в формулах матричных экспонент, то есть матричных рядов; узость класса решений (это ряды по степеням t); метод применим лишь для решения двухточечной задачи (заданы начальное положение системы и конечное).

Метод каскадной декомпозиции применим для решения многоточечных задач; $v(t)$ и $x(t)$ строятся в виде линейных комбинаций линейно-независимых функций различного вида. Для практического применения метода разработан в [13] достаточно простой алгоритм решения, однако, требуется большая работа с заданными условиями на каждом этапе декомпозиции системы.

Построение соответствующих $v(t)$ и $x(t)$ в аналитическом виде остается актуальной задачей.

В настоящей работе рассматривается следующая модель движения: траектория системы (1) выйдя из заданной точки (2) должна пройти в произвольно заданные моменты времени t_i, $i = 0, 1, , \ldots, k$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, через точки (t_i, x_i) с любыми заданными значениями $x_i \in \mathbb{R}^n$. То есть на $x(t)$ накладываются условия

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, ..., k. \tag{5}$$

К примеру, линеаризованные модели движения летательных аппаратов: самолетов, вертолетов, спутников, в том числе объектов, движущихся под действием реактивных сил [3], [5], имеют вид (1). Для таких систем важно при движении оказаться в нужное время t_i в нужном месте x_i.

Модель движения динамической системы (1), (5) рассматривалась в работах [10] - [13], где для построения соответствующего движения разработан метод каскадной декомпозиции. Доказано, что условие (4) есть полное условие существования входа $v(t)$, при реализации которого траектория системы (1) обладает свойствами (5).

Установлено, что при выполнении условия (4) существуют $x(t)$ и $v(t)$ в виде линейных комбинаций некоторых линейно независимых скалярных функций с векторными коэффициентами. Для вычисления соответствующих векторных коэффициентов в этих работах предлагается произвести несколько однотипных декомозиций системы (1), и на каждом этапе декомпозиций необходимо проделать преобразования условий (5).

Результаты этих приводят к мысли о возможность моделирования многоточечного движения для стационарных систем более простым методом неопределённых коэффициентов, предлагаемым далее.

В настоящей работе предлагается вычисление $x(t)$ и $v(t)$ в виде

$$x(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j \varphi_j(t), \tag{6}$$

$$v(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j \varphi_j(t), \tag{7}$$

$\varphi_j(t) = e^{at} \dfrac{1}{(t+c)^j}$, с неопределёнными векторными коэффициентами $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j \in \mathbb{R}^m$. Число r зависит от количества контрольных точек $k - 1$ и от числа p такого, что

$$\operatorname{rank}(B\, AB \ldots A^p B) = n, \quad p \leq n - 1. \tag{8}$$

Идея поиска $v(t)$ и $x(t)$ в виде линейных комбинаций линейно независимых функций не нова. В монографии [14] со ссылкой на другие первоисточники для частных динамических систем строятся $v(t)$ в виде обратной связи, если $x(t)$ – линейная комбинация функций $\varphi_i(t)$, где $\varphi_i(t) = t^i$ или $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}$. В монографии [5] при решении краевой задачи для нестационарной системы (1) с одномерным $v(t)$ в случае известных линейно независимых импульсных переходных функций объекта $h^i(t, \tau)$, $i = \overline{0, n}$, строится $v(t)$ в виде линейной комбинации этих функций.

В работе [15] доказано лишь существование $v(t)$ в полиномиальном виде в задаче построения для системы (1) траектории $x(t)$ со свойствами (5).

В некоторых случаях более предпочтительными, чем полиномиальные функции, являются убывающие функции от t. При сбое в работе системы (не сработал выключатель в момент t_k, не осуществилось переключение технологических режимов, ...)входная вектор-функция и, соответственно, состояние системы стремятся в этом случае к нулю при $t \longrightarrow \infty$, в отличие от полиномиальных вектор-функций, стремящихся при $t \longrightarrow \infty$ к ∞. Поэтому в данной работе используются экспоненциально-дробно-рациональные (ЭДР) функции с некоторым показателем степени a у экспоненты и слагаемым c в знаменателе, которые можно задавать, исходя из особенностей конкретной задачи.

Часть авторов строят управление для некоторой частной задачи в виде достаточно сложных дробно-рациональных функций приближенными методами. Предлагаемый в работе метод состоит в подстановке выражений (6) и (7) непосредственно в уравнение (1) и заданные условия (5), и определении коэффициентов α_j и β_j из полученных соотношений. Система, полученная в результате этих подстановок, может быть недоопределенной, "лишние" компоненты можно положить равными нулю или использовать для получения $v(t)$ и $x(t)$ с дополнительными свойствами. С этой целью количество слагаемых в (6) и (7) можно и увеличить. При этом для вычисления векторных коэффициентов актуально получение линейных алгебраических систем, коэффициентами в которых являются лишь матрицы A^iB, $i = 0, 1, ...,$, в отличие от работ других авторов, например [15], где для доказательства существования соответствующего $v(t)$ используются и другие матричные коэффициенты.

Преимущество предлагаемого метода по сравнению с каскадным методом, разработанным в [10]– [13], в том, что здесь не требуется выведения многоточечных условий для вектор-функций последнего шага декомпозиции, а также в том, что в получаемых формулах и системах для нахождения коэффициентов отсутствуют производные от функций, что приводит к минимальной погрешности вычислений.

1. ЭДР модель многоточечного движения

Для динамической системы (1) с условиями (5) ставится задача построения траектории движения в виде

$$x(t) = e^{at} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\alpha_j}{(t+c)^j}, \tag{9}$$

для чего входная вектор-функция ищется в виде

$$v(t) = e^{at} \sum_{j=0}^{r} \frac{\beta_j}{(t+c)^j}. \tag{10}$$

Для нахождения векторных коэффициентов $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j \in \mathbb{R}^m$, выражения (9) и (10) подставляются непосредственно в уравнение (1). Сократив полученное выражение на e^{at} и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях $\dfrac{1}{t+c}$, приходим к системе

$$\begin{cases} 0 = A\alpha_1 + B\beta_1, \\ -j\alpha_j = A\alpha_{j+1} + B\beta_{j+1}, j = 1, 2, ..., r-2, \\ -(r-1)\alpha_{r-1} = B\beta_r. \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда коэффициенты α_j выражаются через коэффициенты β_{j+1}:

$$\alpha_{r-1} = -\frac{1}{r-1} B\beta_r,$$

$$\alpha_{r-2} = \frac{1}{(r-2)(r-1)}(A - aI)B\beta_r - \frac{1}{r-2} B\beta_{r-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_j = \sum_{i=j}^{r-1} (-1)^{i-j+1} \frac{(j-1)!}{i!} (A - aI)^{i-j} B\beta_{i+1}, \ j = 1, 2, ..., r-1. \tag{12}$$

Подставив определенное из (12) выражение для α_1 в первое равенство системы (11), получаем одно из уравнений для нахождения коэффициентов β_j:

$$\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \frac{1}{(r-j-1)!} (A - aI)^{r-j-1} B\beta_{r-j} = 0. \tag{13}$$

Далее выражения (12) и (9) подставляются в условия (5) и вместе с соотношениями (13) формируется система для нахождения коэффициентов $\beta_j, j = 1, 2, ..., r$:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \frac{1}{(r-j-1)!} (A - aI)^{r-j-1} B\beta_{r-j} = 0, \\ \sum_{j=0}^{r-2} \frac{1}{(t_i + c)^{r-j-2}} \sum_{m=0}^{j} (-1)^{j+1} \frac{(r-m-j-2)!}{(r-m-1)!} (A - aI)^{j-m} B\beta_{r-m} = \\ = (t_i + c) e^{-at_i} x_i, \end{cases} \quad (14)$$

$i = 0, 1, 2, ..., k$. В свою очередь вектор функция $x(t)$ с помощью выражений (9) и (12) приобретает вид

$$x(t) = e^{at} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{(t+c)^j} \sum_{i=j}^{r-1} (-1)^{i-j+1} \frac{(j-1)!}{i!} (A - aI)^{i-j} B\beta_{i+1}. \quad (15)$$

Итак, для построения многоточечного движения динамической системы (1) предлагается поиск вектор-функции $v(t)$ в виде (10) с коэффициентами β_j, определяемыми линейной алгебраической системой (14) с матричными коэффициентами $(A - aI)^s B$, $s = 0, 1, 2, ..., r - 1$. При этом траектория движения $x(t)$ системы (1) имеет вид (15).

Ввиду громоздкости системы (14) ее разрешимость исследуется через разрешимость системы (11) с условиями (5), (9), поскольку система (14) получена из (11), (5), (9) эквивалентными преобразованиями.

2. Решение линейного уравнения с двумя неизвестными

Решается уравнение

$$Ay + Bz = w, \ \forall w \in \mathbb{R}^n, \quad (16)$$

относительно $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, если $\nexists A^{-1}$, $\nexists B^{-1}$. Отображение $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (отображения и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково) производит следующее расщепление пространств в прямые суммы:

$$\mathbb{R}^m = \mathrm{Coim} B \dot{+} \mathrm{Ker} B, \quad \mathbb{R}^n = \mathrm{Im} B \dot{+} \mathrm{Coker} B, \quad (17)$$

где Im B – образ B; Coker B – дефектное подпространство, Coim B – прямое дополнение к подпространству Ker B в $\mathbb{R}^m$. Проекторы на Ker B и Coker B, отвечающие разложениям (17), обозначаются через P и Q, соответственно. Сужение $\widetilde{B}$ отображения B на Coim B имеет обратный $\widetilde{B}^{-1}$. Вводится полуобратный оператор $B^- = \widetilde{B}^-(I - Q)$. Здесь и далее через I обозначаем единичный оператор в любом пространстве.

Лемма 1. *Равенство* (16) *эквивалентно системе*

$$\begin{cases} QAy = Qw, \\ z = B^{-}(-Ay + w) + h, \ \forall h \in KerB, \ (h = Pz). \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство. Достаточно записать (16) в виде

$$B((I - P)z + Pz) = (I - Q)(-Ay + w) + Q(-Ay + w).$$

Поскольку B не действует в Coker B, то $Q(-Ay + w) = 0$. Далее: $B((I - P)z + Pz) = B(I - P)z$ и $B(I - P)$ обратим. Величина Pz остается произвольной. □

Замечание 1. P, Q и B^{-} могут иметь разные формы, но соотношения (18), полученные при разных формах P, Q и B^{-}, будут эквивалентными. Первое соотношение в (18) есть условие корректности равенства (16).

Используя равенство $I = Q^2 + (I - Q)^2$, запишем первое равенство в (18) в виде

$$QAQ(Qy) + QA(I - Q)\big((I - Q)y\big) = Qw. \tag{19}$$

Обозначим

$$Qy = y_1, (I - Q)y = z_1, QAQ = A_1, QA(I - Q) = B_1. \tag{20}$$

Теперь (19) – это

$$A_1y_1 + B_1z_1 = Qw.$$

Равенство (16) эквивалентно теперь системе

$$\begin{cases} z = B^{-}(-Ay + w) + h, \forall h \in Ker\mathrm{B}, \\ y = y_1 + z_1, \\ A_1y_1 + B_1z_1 = Qw \end{cases} \tag{21}$$

в обозначениях (20). Последнее соотношение в этой системе по виду аналогично соотношению (16), только состоит из меньшего количества скалярных уравнений за счет отщепления от (16) первого равенства в (21), поэтому процесс расщепления последнего соотношения в (21) можно продолжить, для чего ввести обозначения

$$\begin{aligned} &Q_{i-1}y_{i-1} = y_i, (I - Q_{i-1})y_{i-1} = z_i, Q_{i-1}A_{i-1}Q_{i-1} = A_i, \\ &Q_{i-1}A_{i-1}(I - Q_{i-1}) = B_i, Q = Q_0, P = P_0, A = A_0, B = B_0, \\ &y = y_0, z = z_0, \ i = 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{22}$$

где Q_{i-1} и P_{i-1} – проекторы на подпространства Coker B и Ker B, отвечающие разложениям

$$\mathrm{Im}B_{i-2} = \mathrm{Coim}B_{i-1}\dot{+}\mathrm{Ker}B_{i-1}, \quad \mathrm{Coker}B_{i-2} = \mathrm{Im}B_{i-1}\dot{+}\mathrm{Coker}B_{i-1},$$

$B_i^- = \widetilde{B}_i^{-1}(I - Q_i)$, $\widetilde{B}_i$ – сужение B_i на Coim B_i. В результате получен следующий результат.

Лемма 2. *Равенство (16) эквивалентно системе*

$$z_{i-1} = B_{i-1}^-(-A_{i-1}y_{i-1} + w_{i-1}) + h_{i-1}, \ \forall h_{i-1} \in KerB_{i-1}, \tag{23}$$

$$y_{i-1} = y_i + z_i, \tag{24}$$

$$A_i y_i + B_i z_i = \prod_{s=1}^{i} Q_{i-s} w, \ i = 1, 2, ... \tag{25}$$

Процесс расщепления заканчивается, если существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что B_p сюрьективно, или $\exists q \in \mathbb{N}$ такое, что $B_q = (0)$.

В работах [10] - [13] доказано, что если $B_q = (0)$, то $\mathrm{rank}(B\,AB\,...\,A^{n-1}B) < n$ и не существует $v(t)$ при котором траектория $x(t)$ системы (1), выйдя из точки x_0 придет в точку x_1, $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, а если B_q – сюрьекция, то такое $v(t)$ существует и

$$\mathrm{rank}(B\,AB\,...\,A^pB) = n. \tag{26}$$

Поскольку расщепление заканчивается за счет конечномерности (16), то для решения поставленной в этом пункте задачи необходимо существование $p \in \mathbb{N}$, при котором B_p – сюръекция, то есть $CokerB_p = \{0\}$, $Q_p = (0)$.

Покажем в дальнейшем, что сюръективности B_p и достаточно для решения исходной задачи в виде (9), (10).

Лемма 3. *Если rank$(B\,AB\,...\,A^pB) = n$, то решение $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ уравнения (16) существует $\forall w \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Равенство (16) эквивалентно системе (22) с $i = 1, 2, ..., p$. Из равенства (25) с $i = p$ находится $z_p = B_p^-(Q_{p-1}Q_{p-2}...Q_1Q_0w - A_py_p) + h_p$, при $\forall y_p \in \mathrm{Coim}B_p$ и $\forall h_p \in \mathrm{Ker}B_p$. С помощью (24) с $i = p$ определяется y_{p-1}. Затем из (23) с $i = p$ находится z_{p-1}. Далее с помощью (24) с $i = p-1$ строится y_{p-2}; потом из (23) с $i = p-1$ находится z_{p-2}; далее из (24) с $i = p-2$ строится y_{p-3} и так далее, пока из (24) с $i = 1$ найдется y_0 и из (23) с $i = 1$ найдется z_0. □

3. О существовании решения многоточечной задачи в ЭДР виде

Требуется выявить условия существования векторов $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j \in \mathbb{R}^m$, связанных соотношениями (11) и условиями

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{\alpha_j}{(t_i + c)^j} = e^{-at_i} x_i, \tag{27}$$

следующими из (5) и (9).

Умножим каждое j-ое равенство в (11) на $\dfrac{1}{(t_i+c)^j}$, последнее на $\dfrac{1}{(t_i+c)^{r-1}}$ и сложим полученные соотношения. С помощью (27) получаем

$$-\sum_{j=1}^{r-1}\frac{j\alpha_j}{(t_i+c)^{j+1}}=e^{-at_i}Ax_i+B\sum_{j=1}^{r}\frac{\beta_j}{(t_i+c)^j}, \tag{28}$$

и условие корректности этого равенства:

$$-\sum_{j=1}^{r-1}\frac{jQ\alpha_j}{(t_i+c)^{j+1}}=e^{-at_i}QAx_i. \tag{29}$$

4.1. Случай $p=1$. Из уравнения (27), умноженного слева на Q, и (29) составим систему

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{r-1}\frac{Q\alpha_j}{(t_i+c)^j}=e^{-at_i}Qx_i,\ i=0,1,...,k,\\ \displaystyle-\sum_{j=1}^{r-1}\frac{jQ\alpha_j}{(t_i+c)^{j+1}}=e^{-at_i}QAx_i,\ j=1,2,...,r-1.\end{cases} \tag{30}$$

Система состоит из $2(k+1)$ уравнений, из нее находятся $2(k+1)$ векторов $Q\alpha_j$, $j=1,2,...,r-1$, следовательно, $r=2(k+1)+1$, если только определитель Δ_1 этой системы отличен от нуля.

Определитель Δ_1 таков: для каждых компонент $Q\alpha_{js}$, $s=1,2,...,\dim\,\mathrm{Coker}B$, векторов $Q\alpha_j$ каждые две строки его – это строки вронскиана для функций $\dfrac{1}{(t+c)^j}$, $j=1,2,...,2(k+1)$, в точках $t=t_i$. Нетрудно доказать, что $\Delta_1\neq 0$.

Далее из системы (11) находятся $(I-Q)\alpha_j$ и β_j следующим образом. Каждое равенство в (11) есть соотношение вида (16), эквивалентное системе (21). Для первого уравнения в (11) система (21) приобретает вид

$$\beta_1=-B^{-}A\alpha_1+\varphi_1,\ \forall\varphi_1\in\mathrm{Ker}B,$$

$$\alpha_1=Q\alpha_1+(I-Q)\alpha_1,$$

$$A_1(Q\alpha_1)+B_1(I-Q)\alpha_1=0.$$

Здесь B_1 – сюръекция (случай $p=1$), следовательно,

$$(1-Q)\alpha_1=-B_1^{-}A_1(Q\alpha_1)+\psi_1,\ \forall\psi_1\in\mathrm{Ker}B_1,,$$

а $Q\alpha_1$ найдено при решении системы (30).

Теперь известны и α_1 и β_1.

Аналогичным образом из остальных уравнений системы (11) последовательно определяются α_j, $j = 1, 2, ..., 2(k+1)$, и β_j, $j = 1, 2, ..., 2(k+1)+1$.

Таким образом, в случае $p = 1$ система (11), (5), (9), и следовательно система (14) разрешима.

4.2. Случай $p = 2$**.** Каждое уравнение в системе (11) эквивалентно системе

$$\beta_{j+1} = B^{-}(-j\alpha_j - A\alpha_{j+1}) + \varphi_{j+1}, \forall \varphi_{j+1} \in \mathrm{Ker}B, \tag{31}$$

$$\alpha_{j+1} = Q\alpha_{j+1} + (I-Q)\alpha_{j+1}, \tag{32}$$

$$-jQ\alpha_j = A_1 Q\alpha_{j+1} + B_1(I-Q)\alpha_{j+1}, j = 0, 1, ..., r-1, \tag{33}$$

если положить $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_r = 0$.

Равенство (33) в свою очередь эквивалентно системе

$$(I-Q)\alpha_{j+1} = B_1^{-}(-jQ\alpha_j - A_1 Q\alpha_{j+1}) + \psi_{j+1}, \forall \psi_{j+1} \in \mathrm{Ker}B_1, \tag{34}$$

$$Q\alpha_{j+1} = Q_1 Q\alpha_{j+1} + (I-Q_1)Q\alpha_{j+1}, \tag{35}$$

$$-jQ_1 Q\alpha_j = A_2 Q_1 Q\alpha_{j+1} + B_2(I-Q_1)Q\alpha_{j+1}. \tag{36}$$

Поскольку $p = 2$, то B_2 − сюръекция, и из (36) имеем

$$(I-Q_1)Q\alpha_{j+1} = B_2^{-}(-jQ_1 Q\alpha_j - A_2 Q_1 Q\alpha_{j+1}) + \chi_{j+1}, \forall \chi_{j+1} \in \mathrm{Ker}B_2. \tag{37}$$

Для нахождения $Q_1 Q\alpha_j$ формируются уравнения: это уравнения (30), умноженные слева на Q_1:

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{Q_1 Q\alpha_j}{(t_i+c)^j} = e^{-at_i} Q_1 Q x_i, \tag{38}$$

$$-\sum_{j=1}^{r-1} \frac{jQ_1 Q\alpha_j}{(t_i+c)^{j+1}} = e^{-at_i} Q_1 Q A x_i, \tag{39}$$

и уравнение, получаемое за счет выполнения второго равенства в системе (30). Для получения этого уравнения следует каждое равенство (33) умножить на $\dfrac{-j}{(t_i+c)^{j+1}}$ и сложить:

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{j(j+1)}{(t_i+c)^{j+2}} Q\alpha_j = -e^{-at_i} A_1 Q A x_i - B_1 \sum_{j=1}^{r-1} \frac{j(I-Q)\alpha_j}{(t_i+c)^{j+1}}.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{j(j+1)}{(t_i+c)^{j+2}} Q_1 Q\alpha_j = -e^{-at_i} Q_1 A_1 Q A x_i. \tag{40}$$

Главный определитель линейной системы (38)-(40) для каждой компоненты $Q_1Q\alpha_{js}$, $s = 1, 2, ..., \dim \mathrm{Coker} B_1$ элемента $Q_1Q\alpha_j$ имеет следующий вид: каждые его три строки – это строки вронскиана для функций $\dfrac{1}{(t+c)^j}$ при $t = t_i$.

Определитель ненулевой, система состоит из $3(k+1)$ уравнений следовательно, она определяет $3(k+1)$ элементов $Q_1Q\alpha_j$. Таким образом, при $p = 2$ имееем: $r = 3(k+1) + 1$.

Затем, из (37) находится $(I - Q_1)Q\alpha_{j+1}$, из (35) находится $Q\alpha_{j+1}$; из (34) – $(I - Q)\alpha_{j+1}$; далее α_{j+1} и α_j из (32); из (31) находится β_{j+1}, $j = 0, 1, ..., r-1$.

Таким образом, при $p = 2$ система (11), (5), (9), а значит и система (14) разрешимы.

4.3. Случай произвольного p**.** Для определения величин $\Pi_{m=0}^{p-1} Q_{p-1-m}\alpha_j$, обозначаемых через γ_j, составляется система

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{r-1} \frac{\gamma_j}{(t_i+c)^j} = e^{-at_i} \prod_{m=0}^{p-1} Q_{p-1-m}x_i, \\ \displaystyle-\sum_{j=1}^{r-1} \frac{j\gamma_j}{(t_i+c)^{j+1}} = e^{-at_i} \prod_{m=0}^{p-1} Q_{p-1-m}Ax_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \displaystyle(-1)^p \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(p-1)!\gamma_j}{(j-1)!(t_i+c)^{j+p}} = e^{-at_i} \prod_{m=0}^{p-1} Q_{p-1-m}A_{p-1-m}x_i, \end{cases} \tag{41}$$

$i = 0, 1, 2, ..., k$. Коэффициенты при каждом γ_j в этой системе есть производные от $\dfrac{1}{t_i+c}$ до p-го порядка, и в главном определителе Δ_p системы (41) для каждой компоненты γ_{js}, $s = 1, 2, ..., \dim \mathrm{Coker} B_{p-1}$, каждые p строк – это строки определителя Вронского при $t = t_i$, $i = 0, 1, 2, ..., k$.

Всего $(p+1)(k+1)$ уравнений для определения $r-1$ величин γ_j, следовательно,

$$r = (p+1)(k+1) + 1. \tag{42}$$

С помощью найденных из системы (41) значений γ_j определяются из (11) $(I - Q_{p-1})\prod_{m=1}^{p-1} Q_{p-1-m}\alpha_j$, затем $\prod_{m=1}^{p-1} Q_{p-1-m}\alpha_j$, и так далее, ... , потом $Q\alpha_j$, $(I - Q)\alpha_j$, α_j и β_j.

Итак, система (14) имеет решение β_j, $j = 1, 2, ..., (p+1)(k+1) + 1$.

Как следует из (31), решение неединственное, β_j содержат произвольные слагаемые из $\mathrm{Ker} B$. Кроме того β_j выражаются через α_j, α_{j+1}, которые, в свою очередь, содержат произвольные слагаемые из $\mathrm{Ker} B_q$, $q = 1, 2, ..., p$.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1. *Если существует $\widetilde{v}(t)$, такая, что траектория $\widetilde{x}(t)$ системы (1), выйдя из произвольно заданной начальной точки $\widetilde{x}(0) = x_0$, непременно придет в момент t_1 в любую заданную точку $\widetilde{x}(t_1) = x_1$, то существует $v(t)$ в виде (10) и $x(t)$ в виде (15) с векторными коэффициентами, определяемыми из системы (14), причем траектория $x(t)$, выйдя из произвольно заданной точки $x(0) = x_0$ пройдет непременно через все заданные контрольные точки $x(t_i) = x_i$, $i = 1, 2, ..., k$.*

Заключение

В данной работе для моделирования движения (состояния) $x(t) \in \mathbb{R}^n$ с контрольными точками линейной динамической системы под воздействием входной вектор-функции $v(t) \in \mathbb{R}^m$ впервые приводятся формулы для вычисления и $v(t)$ и $x(t)$ в экспоненциально-дробно-рациональном виде.

Дробно-рациональные функции обладают важными в практических системах свойствами: они с течением времени затухают. Для изменения скорости затухания в знаменатели дробно-рациональных функций введен слагаемым некоторый параметр. Дробно-рациональные вектор-функции содержат сомножителем скалярную экспоненциальную функцию с дополнительным параметром в показателе для получения разных форм траекторий системы.

Для нахождения векторных коэффициентов, входящих в формулы для $v(t)$ и $x(t)$, составлена линеная алгебраическая система, коэффициентами при искомых векторах в которой являются лишь матрицы, участвующие в описании динамической системы.

Заметим, динамическая система описывается с помощью производной от функции состояния системы, но при построении $x(t)$ и $v(t)$ предлагаемым методом не участвуют ни какие-либо производные, ни решения дифференциального уравнения, ни матричные экспоненты, что приводит при вычислениях к минимальным погрешностям.

Значительную трудность представляет доказательство существования решения алгебраической системы, и доказательство приведено в данной работе не для этой системы, а для эквивалентной ей. В основу доказательства положена лемма о существовании решения линейной системы с необратимыми матричными коэффициентами с двумя векторными неизвестными.

Для получения решения этого уравнения совершается многошаговое разложение системы на системы в подпространствах. В одном подпространстве часть неизвестных выражается через другую часть неизвестных. В другом подпространстве для этой другой части неизвестных формируется система, схожая по виду с исходной системой, но содержащая меньшее количество скалярных уравнений. Эта новая система также расщепляется на системы в новых подпространствах, и т. д.

За счет конечномерности исходной системы процесс расщепления конечен, и на последнем шаге выявляются полные условия на коэффициенты системы, при выполнении которых и эта линейная система, и поставленная задача имеют решения.

Список литературы

1. Гурман, В. И. Вырожденные задачи оптимального управления / В. И. Гурман. — М.: Наука, 1977. — 304 с.

   GURMMAN, V. I. (1977) *Degenerate Optimal Control Problems.* Moscow: Nauka.

2. Нельсон, П. У., Перельсон, А. С. Математический анализ моделей дифференциального уравнения задержки ВИЧ-1-инфекции // Biosci. — М.: Наука, 2004. — Т. 179, 1. — С. 73–94.

   NELSON, P. U. and PERELSON, A. S (2004) Mathematical analysis of models of the differential equation of HIV-1 infection delay. *Moscow: Nauka.* Vol. 179 (1). p. 73–94.

3. Дорф, Р., Бишоп, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. — 832 с.

   DORF R. and BISHOP, R. (2002) *Modern control systems.* Moscow: Basic knowledge laboratory.

4. Баранов, Э. Ф. Проблемы разработки схемы динамической модели межотраслевого баланса // Экономика и математические методы. — 1968. — № 1. — С. 26.

   BARANOV, E. E. (1968) Problems of developing a dynamic model of intersectoral balance. *Economy and mathematical methods.* Vol. 1. p. 3–26.

5. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

   KRASOVSKY, N. N. (1968) *Theory of motion control.* Moscow: Nauka.

6. Калман, Р. Е., Фалб, П., Арбиб, М. Очерки по математической теории систем / Р. Е. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М.: Едиториал, 2004. — 400 с.

   KALMAN, R. E. and FALB, P. and ARBIB, M. (2004) *Essays on Mathematical Systems Theory.* Moscow: Editorial.

7. Крылов, А. Н. Избранные труды / А. Н. Крылов. — Изд-во Акад.наук СССР, 1958. — 803 с.

   KRYLOV, A. N. (1958) *Selected Works.* Publishing House of Academic Sciences of the USSR.

8. Понтрягин, Л. С. Оптимальные процессы регулирования // УМН. — вып.1(85), 1959. — Т. 14. — С. 3–20.

   PONTRIAGIN, L. S (1959) Optimal regulation processes. *SMS.* Vol. 14(1). p. 3–20.

9. Калман, Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды IFAC. — Москва, 1960. — С. 521–546.

   KALMAN, R. E. (1960) Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics. *Moscow: IFAC Proceedings.* p. 521–546.

10. ZUBOVA, S. P. (2012) Solution of Inverse Problems for Linear Dynamical Systems by the Cascade Method. *Doklady Mathematics.* 86(3). p. 846–849.

11. Зубова, С П. О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек // Автоматика и Телемеханика. — 2011. — № 1. — С. 27–41.

    ZUBOVA, S. P. (2011) On full controllability criteria of a descriptor system. The polinomial solution of a control problem with checkpoints. *Automation and Remote Control.* V. 72(1). p. 23–37.

12. Зубова, С. П., Раецкая, Е. В., Ле, Хай Чунг О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления // Автоматика и Телемеханика. — 2008. — № 11. — С. 41–47.

    Zubova, S. P., Trung, L. H., Raetskaya, E. V. (2008) On polinomial solutions of the linear stationary control system. *Automation and Remote Control.* V. 69(11). p. 1852–1858.

13. Зубова, С. П., Раецкая, Е. В. Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции // Автоматика и Телемеханика. — 2017. — № 7. — С. 22–38.

    Zubova, S. P., Raetskaya, E. V. (2017) Algoritm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition. *Automation and Remote Control.* V. 78(7). p. 1189–1202.

14. Крутько, П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели / П. Д. Крутько. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

    KRYTKO, P. D. (1987) *Inverse problems of the dynamics of controlled systems. Linear models.*. Moscow: Nauka.

15. AILON, A., LANGHOLZ, G. (1986) More on the controllability of linear time-invariant systems. *Int. J. Contr.* V. 44(4). p. 1161–1176.