УДК: 517.927.21, 517.911.5, 51-73

MSC2010: 34B05, 34C60, 80A19

DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-81-100

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИФФУЗИИ И КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

© Д. В. Туртин

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
Ивановский филиал
кафедра менеджмента, технологий бизнеса и гуманитарных дисциплин
ул. Дзержинского, 53, Иваново, 153025, Российская Федерация
e-mail: *turtin@mail.ru*

© М. А. Степович*, В. В. Калманович, А. А. Картанов*****

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
Инженерно–технологический институт
*, **кафедра физики и математики, ***кафедра информатики и информационных технологий
ул. Степана Разина, 26, Калуга, 248023, Российская Федерация
e-mail: **m.stepovich@rambler.ru*, ***v572264@yandex.ru*, ****kartanovartem@gmail.com*

On the correctness of mathematical models of diffusion and cathodoluminescence.

Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V, Kartanov A. A.

Abstract. Mathematical models of diffusion and cathodoluminescence of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide electron beam in homogeneous and multilayer semiconductor materials are considered. The use of wide electron beams makes it possible to reduce these problems to one–dimensional ones and to describe these mathematical models by ordinary differential equations. For the collective movement model, the corresponding mathematical model is:

$$D\frac{d^2\Delta p\,(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p\,(z)}{\tau} = -\rho\,(z)$$

with boundary conditions

$$D\,\frac{d\Delta p\,(z)}{dz}\bigg|_{z\,=\,0} = \upsilon_s \Delta p\,(0)\,, \quad \Delta p\,(\infty) = 0.$$

Here the function $\rho\,(z)$ is the dependence on the coordinate z of the density of minority charge carriers generated by an electron beam in a semiconductor target prior to their diffusion, $\Delta p\,(z)$ is the sought distribution of minority charge carriers after their diffusion, the remaining parameters for homogeneous materials are constants.

For the model of independent sources, the corresponding mathematical model is:

$$D\,\frac{d^2\Delta p\,(z,\ z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p\,(z,\ z_0)}{\tau} = -\rho\,(z)\,\delta\,(z - z_0)$$

with boundary conditions

$$D\ \frac{d\Delta p\left(z,\ z_0\right)}{dz}\bigg|_{z=0} = \upsilon_s \Delta p\left(0,\ z_0\right), \quad \Delta p\left(\infty,\ z_0\right) = 0.$$

Here the function $\Delta p\left(z, z_0\right)$ describes the distribution over the depth of the minority charge carriers generated by a plane infinitely thin source located at a depth z_0, $z_0 \in [0, \infty)$. The distribution of nonequilibrium charge carriers $\Delta p(z)$ in this case is found as

$$\Delta p(z) = \int\limits_0^\infty \Delta p\left(z,\ z_0\right) dz_0.$$

For both models, the intensity of cathodoluminescence I taking into account absorption at a fixed radiation wavelength λ was calculated as

$$I \sim \int\limits_{l_s}^\infty \Delta p\left(z\right) \exp\left[-\alpha(\lambda) z\right] dz.$$

The study of the considered models is carried out, including the proof of the uniqueness of solutions and the continuous dependence of solutions on the data of the problem. Estimates are obtained for solving the problems under consideration, which make it possible to use them in electron probe technologies.

In the case of one–dimensional diffusion into the n–layer final semiconductor structure ($z \in [0,\ l]$) the depth distribution of the minority charge carrier is found as a solution to the differential equations

$$D^{(i)}\left(z\right) \frac{\mathrm{d}^2 \Delta p^{(i)}\left(z\right)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\Delta p^{(i)}\left(z\right)}{\tau^{(i)}\left(z\right)} = -\rho^{(i)}\left(z\right), i = \overline{1, n}$$

with boundary conditions

$$D^{(1)}\ \frac{\mathrm{d}\Delta p^{(1)}\left(z\right)}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=0} = \nu_s^{(1)} \Delta p^{(1)}\left(0\right), \quad D^{(n)}\ \frac{\mathrm{d}\Delta p^{(n)}\left(z\right)}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=l} = -\nu_s^{(n)} \Delta p^{(n)}\left(l\right).$$

The superscript in parentheses indicates the layer number.

The possibilities of using this approach for multilayer structures with an arbitrary number of layers are discussed.

Keywords: *mathematical model, stationary differential heat and mass transfer equation, ordinary differential equations, Cauchy problem, cathodoluminescence.*

Введение

Значительное число различных процессов описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. В качестве примера можно привести процессы, возникающие при нормальном падении широких пучков заряженных частиц или электромагнитного излучения на плоскую поверхность твёрдого тела. К числу таких относятся процессы тепломассопереноса, обусловленного взаимодействием широких источников возбуждения с плоской поверхностью конденсированного вещества, а также процессы, непосредственно связанные с процессами тепломассопереноса, например, катодолюминесценция (КЛ), возникающая при излучательной рекомбинации генерированных электронным пучком и продиффундировавших в полупроводниковой мишени неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) [1–4].

Регистрация и изучение КЛ излучения является весьма важным методом исследования состава и свойств однородных и многослойных полупроводниковых структур опто–, микро–, наноэлектроники и СВЧ–техники — см., например, [3, 4]. Этот метод позволяет получать информацию об объекте исследования, прежде всего о фотоприёмных и светоизлучающих материалах и структурах, которую весьма сложно либо вообще невозможно получить иным способом. Однако изучение и анализ качественных свойств процессов тепломассопереноса в микро– и электроннозондовых технологиях [5–7], в т.ч. проблемы корректности, ранее практически не проводились. В качестве немногих примеров таких исследований можно привести работы, в которых изучались проблемы решения стационарных и нестационарных дифференциальных уравнений диффузии ННЗ и связанные с ними проблемы корректности математических моделей, описывающих взаимодействие остро сфокусированных электронных пучков (электронных зондов) с однородными полупроводниковыми мишенями [8–13]. В то же время для одномерного движения ННЗ такая задача ранее не изучалась и даже не ставилась. Ввиду этого в настоящей работе рассматриваются некоторые возможности решения стационарных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы взаимодействия широких электронных пучков с однородными полупроводниковыми объектами и установление корректности математических моделей КЛ, построенных на основе решения рассматриваемых дифференциальных уравнений. Изучение таких задач актуально как для однородных толстых (с математической точки зрения полубесконечных) полупроводников [5, 14, 15], так и для материалов и структур конечной толщины[14, 16, 17] — широко используемых на практике для создания различных структур опто–, микро–, наноэлектроники и СВЧ–техники.

1. Моделирование потерь энергии электронами пучка в твёрдом теле

При моделировании процессов тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с твёрдым телом, одним из определяющих факторов при проведении расчётов является описание правой части дифференциальных уравнений, задающих количественную характеристику воздействия электронов пучка на облучаемую поверхность мишени. Такой характеристикой является мощность, рассеиваемая первичным пучком электронов в мишени. При проведении практических расчётов для всех проводящих материалов (не только полупроводниковых) и практически для всех энергий пучка киловольтных электронов (до энергий около 50 кэВ) приемлемые результаты могут быть получены с использованием следующей полуэмпирической модели, описывающей плотность потерь энергии широким пучком электронов [18–20]:

$$\rho^*(z) = \frac{1,085\ (1-\eta)\ P_0}{\sqrt{\pi}\, z_{ms}\left(1-\eta+\eta\,\frac{z_{ss}}{z_{ms}}\right)}\left\{\exp\left[-\left(\frac{z-z_{ms}}{z_{ms}}\right)^2\right]+\frac{\eta}{1-\eta}\exp\left[-\left(\frac{z-z_{ss}}{z_{ss}}\right)^2\right]\right\}. \tag{1}$$

Здесь P_0 — мощность электронного пучка, рассеянная в мишени, z_{ms} — глубина максимальных потерь энергии первичными электронами, испытавшими малоугловое рассеяние и поглощёнными в мишени; z_{ss} — глубина максимальных потерь энергии электронами, испытавшими рассеяние на большие углы и покинувшими мишень (обратно рассеянные электроны), $z_{ss} = Z^{-1/3} z_{ms}$; η — коэффициент обратного рассеяния электронов зонда, $\eta = 0,024 eZA^{1,67}$, где e — основание натуральных логарифмов; Z и A — порядковый номер вещества мишени в периодической таблице элементов и её атомный вес, соответственно.

2. Математические модели диффузии и катодолюминесценции

Модель коллективной диффузии. В этом случае дифференциальное уравнение диффузии неравновесных ННЗ, генерируемых широким электронным пучком в полубесконечной однородной полупроводниковой мишени, имеет вид

$$D\frac{d^2\Delta p(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z)}{\tau} = -\rho(z) \tag{2}$$

с граничными условиями

$$D\left.\frac{d\Delta p(z)}{dz}\right|_{z=0} = \upsilon_s \Delta p(0), \quad \Delta p(\infty) = 0. \tag{3}$$

Здесь $\rho(z)$ — концентрация ННЗ, генерированных электронным пучком в полупроводнике в единицу времени на глубине z (до их диффузии), функция $\Delta p(z)$ описывает искомое распределение ННЗ по глубине после их диффузии, а постоянные D, τ и υ_s — коэффициент диффузии, время жизни и скорость поверхностной рекомбинации ННЗ соответственно. Значение $\rho(z)$ получается делением плотности потерь энергии электронами пучка в единицу времени $\rho^*(z)$ [18–20] на энергию образования ННЗ.

Некоторые возможности этой модели, основанной на решении дифференциального уравнения (2)–(3) рассмотрены в классических работах [21–23] и некоторых последующих работах.

Модель независимых источников. Для математического моделирования пространственного распределения ННЗ, генерированных в полупроводниковом материале электронным зондом, можно использовать так называемую модель независимых источников, согласно которой на диффузию неравновесных ННЗ из любого микрообъема полупроводника не оказывают влияния другие электроны или дырки из других микрообластей материала. Такой подход в принципе может позволить описать локальные неоднородности, имеющиеся в однородных материалах, а также неоднородные, в том числе и многослойные, материалы. Математически это выражается в том, что сначала решается уравнение диффузии для каждого из точечных источников ННЗ, после чего посредством интегрирования по объему, занимаемому источниками ННЗ, находится распределение ННЗ в полупроводнике в результате их диффузии. Идея такого подхода заимствована из классической работы [24] и использовалась нами, в том числе в задачах математического моделирования распределений ННЗ в однородных полупроводниковых материалах [25]. Соответствующее дифференциальное уравнение для однородного полупроводника или слоя многослойной планарной полупроводниковой структуры имеет вид:

$$D\frac{d^2\Delta p(z,\ z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z,\ z_0)}{\tau} = -\rho(z)\,\delta(z - z_0) \tag{4}$$

с граничными условиями

$$D\left.\frac{d\Delta p(z,\ z_0)}{dz}\right|_{z=0} = \upsilon_s \Delta p(0,\ z_0), \quad \Delta p(\infty,\ z_0) = 0. \tag{5}$$

Для однородного полупроводника интегрирование $\Delta p(z,\ z_0)$ по z_0 ($z_0 \in [0,\ \infty)$) даёт искомое распределение ННЗ по глубине $\Delta p(z)$:

$$\Delta p(z) = \int\limits_0^\infty \Delta p(z,\ z_0)\, dz_0 = \int\limits_0^z \Delta p_2(z,\ z_0)\, dz_0 + \int\limits_z^\infty \Delta p_1(z,\ z_0)\, dz_0. \tag{6}$$

Модель независимых источников использовалась нами и для неоднородных планарных структур: ранее была решена задача нахождения распределений ННЗ в планарных полубесконечных двух ([26], [27]) и трёхслойных ([28], [29]) полупроводниковых структурах для случая постоянства D и τ внутри каждого слоя. Однако распространить этот метод на планарные структуры с большим числом слоёв нам не удалось ввиду возникших трудностей технического характера.

Модель диффузии для произвольного числа слоёв. В случае одномерной диффузии в конечный полупроводник вдоль оси OZ, перпендикулярной поверхности n–слойной полупроводниковой структуры ($z \in [0,\ l]$) , распределение ННЗ по глубине находится как решение дифференциального уравнения [30–32]

$$D^{(i)}\left(z\right)\frac{\mathrm{d}^2\Delta p^{(i)}\left(z\right)}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\Delta p^{(i)}\left(z\right)}{\tau^{(i)}\left(z\right)}=-\rho^{(i)}\left(z\right), i=\overline{1,n} \qquad (7)$$

с граничными условиями

$$D^{(1)}\left.\frac{\mathrm{d}\Delta p^{(1)}\left(z\right)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0}=\nu_s^{(1)}\Delta p^{(1)}\left(0\right), \quad D^{(n)}\left.\frac{\mathrm{d}\Delta p^{(n)}\left(z\right)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=l}=-\nu_s^{(n)}\Delta p^{(n)}\left(l\right). \qquad (8)$$

Верхний индекс в скобках указывает номер слоя. Для многослойной структуры обозначим: $z_1 = 0$, $z_{n+1} = l$ — координаты внешних границ полупроводника, z_2, z_3, ..., z_n — координаты границ раздела слоёв; $D^{(i)}$, $L^{(i)}$, $\tau^{(i)}$ — электрофизические параметры: коэффициент диффузии, диффузионная длина и время жизни ННЗ в i–м слое соответственно, при этом $L^{(i)} = \sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}$. На границах полупроводника (при $z = 0$ и при $z = l$) приведённые скорости поверхностной рекомбинации $S^{(1)} = L^{(1)}\nu_s^{(1)} \Big/ D^{(1)}$, $S^{(n)} = L^{(n)}\nu_s^{(n)} \Big/ D^{(n)}$, где $\nu_s^{(1)}$ и $\nu_s^{(n)}$ — скорости поверхностной рекомбинации ННЗ в первом и в n–ом слоях соответственно. Функция $\Delta p^{(i)}\left(z\right)$ описывает распределение по глубине в i–м слое неравновесных ННЗ, генерированных внешним энергетическим воздействием, после их диффузии в полупроводнике. Функция $\rho^{(i)}\left(z\right)$ — зависимость от координаты плотности ННЗ, генерированных электронным пучком в полупроводниковой мишени до их диффузии. Для широкого электронного пучка $\rho^{(i)}\left(z\right)$ может быть найдена из выражения для плотности потерь энергии электронным пучком $\rho^{*(i)}\left(z\right)$, выделяемой в мишени в единицу времени до начала процесса диффузии [18–20]. Отметим также, что использование матричного метода для решения рассматриваемой задачи позволяет получить её решение в аналитическом виде — см., например [30–32].

Модель катодолюминесценции. КЛ излучение, возникающее при взаимодействии электронного пучка с поверхностью полупроводниковой мишени, может быть использовано для определения её параметров [2–4]. Для прямозонных полупроводников некоторые параметры могут быть получены из измерений зависимости интенсивности I монохроматической КЛ от энергии электронов пучка E_0. Функциональную зависимость, связывающую I и E_0, запишем в виде $I = I\left(E_0,\ \mathbf{\Theta}\right)$. Здесь $\mathbf{\Theta} = (\theta_k)$ — вектор параметров, $k = \overline{1,\ p}$, p — число параметров. Для широкого электронного пучка, низкого уровня возбуждения и случая линейной излучательной рекомбинации ННЗ, часто реализующихся на практике, используем выражение [4]:

$$I(E_0, \mathbf{\Theta}) \sim \left\{1 + 0,155\left[1 - \exp\left(-\frac{z_c}{L}\right)\right]\right\}\int\limits_{l_s}^{\infty}\Delta p(z)\exp\left[-\alpha(\lambda)z\right]dz. \qquad (9)$$

Здесь l_s — толщина приповерхностной области, обедненной основными носителями заряда, $\alpha(\lambda)$ — коэффициент поглощения КЛ излучения и z_c — координата центра тяжести $\rho^*\left(z\right)$ — распределения потерь энергии электронами в мишени.

3. О существовании и единственности решения рассматриваемых задач

Модель коллективной диффузии. Для решения задачи (2), (3) будем использовать стандартные методы математического анализа. Используя метод вариации произвольной постоянной, получим решение уравнения (2) в виде:

$$\Delta p\left(z\right) = A_1\exp\left(\sqrt{\sigma}z\right) + B_1\exp\left(-\sqrt{\sigma}z\right) - \frac{1}{D\sqrt{\sigma}}\int\limits_{0}^{z}\rho\left(\xi\right)\operatorname{sh}\left(\sqrt{\sigma}\left(z-\xi\right)\right)d\xi, \qquad (10)$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (3).

Продифференцировав (10), получим

$$\Delta p'\left(z\right) = A_1\sqrt{\sigma}\exp\left(\sqrt{\sigma}z\right) - B_1\sqrt{\sigma}\exp\left(-\sqrt{\sigma}z\right) - \frac{1}{D}\int\limits_{0}^{z}\rho\left(\xi\right)\operatorname{ch}\left(\sqrt{\sigma}\left(z-\xi\right)\right)d\xi. \qquad (11)$$

Подставив (10) и (11) в граничные условия (3), получим систему алгебраических уравнения для нахождения A_1 и B_1:

Из первого граничного условия (на поверхности полупроводника) получим

$$D\left(A_1\sqrt{\sigma} - B_1\sqrt{\sigma}\right) = v_{s_1}\left(A_1 - B_1\right). \qquad (12)$$

Прежде чем использовать второе граничное условие (на бесконечности $\Delta p(\infty) = 0$ — см. (3)) кратко приведём оценку ядра интеграла

$$I(z) = \int\limits_0^z \rho\,(\xi)\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\sigma}\,(z-\xi)\right)\,d\xi. \tag{13}$$

Отметим, что

$$\mathrm{sh}\left[\sqrt{\sigma}\,(z-\xi)\right] = \frac{\exp\sqrt{\sigma}\,(z-\xi) - \exp\left[-\sqrt{\sigma}\,(z-\xi)\right]}{2}$$

и

$$I(0) = \int\limits_0^0 \rho\,(\xi)\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{\sigma}\,(-\xi)\right]\,d\xi = 0.$$

Функция $\rho\,(\xi)$ описывается функциями типа Гаусса — см. (1). В силу асимптотики интеграла ошибок

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \exp\left(-\xi^2\right)\,d\xi \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp\left(-z^2\right)}{z}$$

откуда, в конечном итоге, при больших z следует сходимость $I(z)$ к нулю. Значит из второго граничного условия ($\Delta p(\infty) = 0$ — см. (3)) и формулы (10) следует, что $A_1 = 0$.

Тогда

$$\Delta p(z) = B_1\exp\left(-\sigma z\right) - I(z). \tag{14}$$

Отсюда $\Delta p(0) = B_1$.

Чтобы использовать первое граничное условие (3) (на поверхности полупроводника), продифференцируем интеграл $I(z)$:

$$I^{'}(z) = -\frac{1}{D\sqrt{\sigma}}\left\{\int\limits_0^z \rho(\xi)\sqrt{\sigma}\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{\sigma}(z-\xi)\right]\;d\xi + \rho(z)\,\mathrm{sh}\,0\right\} =$$

$$= -\frac{1}{D}\int\limits_0^z \rho(\xi)\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{\sigma}(z-\xi)\right]\;d\xi.$$

Тогда для левой части этого граничного условия получим

$$D\left.\frac{d\Delta p(z)}{dz}\right|_{z=0} = -B_1\sigma\exp\left(0\right) - \frac{1}{D}\int\limits_0^0 \rho(\xi)\,\mathrm{ch}(0)\;d\xi = -B_1\sigma$$

и в целом это граничное условие примет вид:

$$D(-B_1\sigma) = v_s B_1.$$

Из полученного соотношения для рассматриваемых полупроводниковых материалов следует, что $B_1 = 0$ и для (14) с учётом (13) получим решение рассматриваемой задачи в виде:

$$\Delta p(z) = -I(z).$$

Отметим, что возможна и иная запись решения рассматриваемой задачи — см. [21, 22]. Однако использование решения в виде (10) позволяет провести исследование корректности задачи и получить оценки решения существенно проще.

Теорема 1. *Решение задачи (2), (3)* $\forall z \in [0,\ \infty)$ *единственно.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть n_1 и n_2 — два различных решения задачи (2), (3). Рассмотрим функцию $u = n_2 - n_1$, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$D\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{u}{\tau} = 0 \tag{15}$$

и граничным условиям (3). Применив к полученной задаче формулы (10) и (11) с $\rho(z) = 0$, получим $u = 0$, откуда следует $n_2 = n_1$. Полученное противоречие и доказывает единственность решения задачи (2), (3). Теорема 1 доказана. □

Модель независимых источников. Задача (4), (5) $\forall z \in [0,\ \infty)$ имеет решение, которое определяется следующей формулой:

$$\Delta p\left(z,\ z_0\right) = \begin{cases} \frac{\rho(z_0)\tau}{2L}\exp\left(-\frac{z_0}{L}\right)\left[\exp\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1}\exp\left(-\frac{z}{L}\right)\right]\ \forall\, z \in [0,\ z_0]\,, \\ \\ \frac{\rho(z_0)\tau}{2L}\exp\left(-\frac{z}{L}\right)\ \left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1}\exp\left(-\frac{z_0}{L}\right)\right]\ \ \forall\, z \in [z_0,\ \infty)\,. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $L = \sqrt{D\tau}$ — диффузионная длина ННЗ, а $S = v_s L/D$ — приведённая скорость поверхностной рекомбинации ННЗ.

Решение задачи (4), (5) в виде (16) приведено в [4, 25].

Теорема 2. *Решение задачи (4), (5)* $\forall z \in [0,\ \infty)$ *единственно.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 с $\rho(z_0) = 0$ в правой части дифференциального уравнения. Теорема 2 доказана. □

Модель диффузии для произвольного числа слоёв. Существование и единственность решения задачи диффузии для произвольного числа слоёв (7), (8) следует из рассмотренных выше задач о диффузии ННЗ. Отметим также, что решение задачи в матричном виде [31, 32] даёт её аналитическое решение, причём численные и аналитическое решения дают практически совпадающие результаты [33].

Модель катодолюминесценции. Существование и единственность решения задачи КЛ (9) следует из рассмотренных выше задач о диффузии ННЗ. Некоторые особенности практической реализации этой модели для полупроводниковых структур, используемых в микро– и оптоэлектронике, приведены в [34].

4. Теоремы об оценках решений рассматриваемых задач

Следующие теоремы устанавливают непрерывную зависимость решений рассматриваемых задач от правых частей дифференциальных уравнений и дают количественные оценки решений рассматриваемых задач.

Модель коллективной диффузии.

Теорема 3. *Пусть* u_1 *— решение уравнения*

$$D\frac{d^2\Delta p\left(z\right)}{dz^2}-\frac{\Delta p\left(z\right)}{\tau}=-\rho_1\left(z\right)$$

с граничными условиями (3), а u_2 *— решение уравнения*

$$D\frac{d^2\Delta p\left(z\right)}{dz^2}-\frac{\Delta p\left(z\right)}{\tau}=-\rho_2\left(z\right)$$

с граничными условиями (3) и $\forall z\in[0,\ \infty)$

$$|\rho_2(z)-\rho_1(z)|\le\varepsilon. \tag{17}$$

Тогда $\forall z\in[0,\ \infty)$ *справедлива оценка*

$$|u_2(z)-u_1(z)|\le\varepsilon c,\ c=\frac{1}{D\sigma}\left[\mathrm{ch}\left(l\sqrt{\sigma}\right)-1\right]. \tag{18}$$

Доказательство. Применив поочередно формулу (10) к задачам для функций u_1 и u_2, получим

$$u_2\left(z\right)=A_1\exp\left(\sqrt{\sigma}z\right)+B_1\exp\left(-\sqrt{\sigma}z\right)-\frac{1}{D\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^z\rho_2\left(\xi\right)\mathrm{sh}\left[\sqrt{\sigma}\left(z-\xi\right)\right]\,d\xi,$$

$$u_1\left(z\right)=A_1\exp\left(\sqrt{\sigma}z\right)+B_1\exp\left(-\sqrt{\sigma}z\right)-\frac{1}{D\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^z\rho_1\left(\xi\right)\mathrm{sh}\left[\sqrt{\sigma}\left(z-\xi\right)\right]\,d\xi.$$

Вычитая второе равенство из первого и учитывая оценку (17), имеем

$$\left|u_2\left(z\right)-u_1\left(z\right)\right|\leq\varepsilon\frac{1}{D\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^z \mathrm{sh}\left[\sqrt{\sigma}\left(z-\xi\right)\right]\,d\xi,$$

откуда следует оценка (18). Теорема 3 и в целом корректность математической модели коллективной диффузии доказаны. □

Модель независимых источников.

Теорема 4. *Пусть* $\Delta p_1(z,\ z_0)$ *— решение уравнения*

$$D\,\frac{d^2\Delta p_1\left(z,\ z_0\right)}{dz^2}-\frac{\Delta p_1\left(z,\ z_0\right)}{\tau}=-\rho_1\left(z\right)\delta\left(z-z_0\right)$$

с граничными условиями (5), $\Delta p_2(z,\ z_0)$ *— решение уравнения*

$$D\,\frac{d^2\Delta p_2\left(z,\ z_0\right)}{dz^2}-\frac{\Delta p_2\left(z,\ z_0\right)}{\tau}=-\rho_2\left(z\right)\delta\left(z-z_0\right)$$

с граничными условиями (5) и $\forall z\in[0,\ \infty)$

$$|\rho_2(z)-\rho_1(z)|\leq\varepsilon. \tag{19}$$

Тогда $\forall z\in[0,\ \infty)$ *справедлива оценка*

$$|\Delta p_2(z,z_0)-\Delta p_1(z,z_0)|\leq\frac{\varepsilon\tau}{L}.$$

Доказательство. На отрезке $z\in[0,\ z_0]$ решение задачи (4), (5) определяется формулой (16). Тогда для функций $\Delta p_1(z,\ z_0)$ и $\Delta p_2(z,\ z_0)$ имеем

$$\Delta p_1\left(z,\ z_0\right)=\frac{\rho_1\left(z_0\right)\tau}{2L}\,\exp\left(-\frac{z_0}{L}\right)\left[\exp\left(\frac{z}{L}\right)-\frac{S-1}{S+1}\,\exp\left(-\frac{z}{L}\right)\right],$$

$$\Delta p_2\left(z,\ z_0\right)=\frac{\rho_2\left(z_0\right)\tau}{2L}\,\exp\left(-\frac{z_0}{L}\right)\left[\exp\left(\frac{z}{L}\right)-\frac{S-1}{S+1}\,\exp\left(-\frac{z}{L}\right)\right],$$

откуда

$$|\Delta p_2(z,z_0)-\Delta p_1(z,z_0)|\leq\frac{\left|\rho_2\left(z_0\right)-\rho_1\left(z_0\right)\right|\tau}{2L}\,\exp\left(-\frac{z_0}{L}\right)\left[\exp\left(\frac{z}{L}\right)-\frac{S-1}{S+1}\,\exp\left(-\frac{z}{L}\right)\right].$$

Применив оценку (19) и учитывая условие $z\in[0,\ z_0]$, получим

$$|\Delta p_2(z,z_0)-\Delta p_1(z,z_0)|\leq\frac{\varepsilon\tau}{L}\,\exp\left(-\frac{z_0-z}{L}\right). \tag{20}$$

На полуинтервале $z \in [z_0,\ \infty)$ решение задачи (4), (5) также определяется формулой (16). Тогда для функций $\Delta p_1(z,\ z_0)$ и $\Delta p_2(z,\ z_0)$ имеем

$$\Delta p_1\left(z,\ z_0\right) = \frac{\rho_1\left(z_0\right)\tau}{2L}\exp\left(-\frac{z}{L}\right)\left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1}\exp\left(-\frac{z_0}{L}\right)\right],$$

$$\Delta p_2\left(z,\ z_0\right) = \frac{\rho_2\left(z_0\right)\tau}{2L}\exp\left(-\frac{z}{L}\right)\left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1}\exp\left(-\frac{z_0}{L}\right)\right],$$

откуда

$$|\Delta p_2(z,z_0) - \Delta p_1(z,z_0)| \leq \frac{\left|\rho_2\left(z_0\right) - \rho_1\left(z_0\right)\right|\tau}{2L}\exp\left(-\frac{z}{L}\right)\left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1}\exp\left(-\frac{z_0}{L}\right)\right].$$

Применив оценку (19) и учитывая условие $z \in [z_0,\ \infty)$, получим

$$|\Delta p_2(z,z_0) - \Delta p_1(z,z_0)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L}\exp\left(-\frac{z-z_0}{L}\right). \tag{21}$$

Объединяя оценки (20) и (21), получим, что при всех $z \geq 0$

$$|\Delta p_2(z,z_0) - \Delta p_1(z,z_0)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L}\exp\left(-\frac{|z-z_0|}{L}\right),$$

откуда вытекает

$$|\Delta p_2(z,z_0) - \Delta p_1(z,z_0)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L}.$$

Теорема 4 доказана. □

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда* $\forall z \in [0,\ \infty)$ *справедлива оценка*

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \varepsilon\tau.$$

Доказательство. Оценим выражение

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| = \int\limits_0^\infty \left|\Delta p_2\left(z,\ z_0\right) - \Delta p_1\left(z,\ z_0\right)\right| dz_0.$$

Применив оценку (20), получим

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{|z-z_0|}{L}\right) dz_0. \tag{22}$$

Поскольку

$$\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{|z-z_0|}{L}\right) dz_0. = \int\limits_0^{z_0} \exp\left(\frac{z-z_0}{L}\right) dz_0 + \int\limits_{z_0}^\infty \exp\left(\frac{z_0-z}{L}\right) dz_0 = L\exp\left(-\frac{z}{L}\right),$$

то из (22) получим

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \varepsilon\tau. \tag{23}$$

Теорема 5 и в целом корректность математической модели независимых источников доказаны. □

Модель катодолюминесценции.

Теорема 6. *Пусть* $\forall z \in [0, \infty)$ *выполнены условия теоремы (5). Тогда*

$$|I_2(E_0, \mathbf{\Theta}) - I_1(E_0, \mathbf{\Theta})| \leq \varepsilon\tau \left\{1 + 0,155 \left[1 - \exp\left(-\frac{z_c}{L}\right)\right]\right\} \leq 1,155\varepsilon\tau. \tag{24}$$

Доказательство. Применив формулу (9) для интенсивностей КЛ I_1 и I_2, получим

$$I_1(E_0, \mathbf{\Theta}) = \left\{1 + 0,155 \left[1 - \exp\left(-\frac{z_c}{L}\right)\right]\right\} \int\limits_{l_s}^{\infty} \Delta p_1(z) \exp\left[-\alpha(\lambda)z\right] dz,$$

$$I_2(E_0, \mathbf{\Theta}) = \left\{1 + 0,155 \left[1 - \exp\left(-\frac{z_c}{L}\right)\right]\right\} \int\limits_{l_s}^{\infty} \Delta p_2(z) \exp\left[-\alpha(\lambda)z\right] dz.$$

Вычитая из второго равенства первое, имеем

$$|I_2(E_0, \mathbf{\Theta}) - I_1(E_0, \mathbf{\Theta})| =$$

$$= \left\{1 + 0,155 \left[1 - \exp\left(-\frac{z_c}{L}\right)\right]\right\} \int\limits_{l_s}^{\infty} |\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \exp\left[-\alpha(\lambda)z\right] dz.$$

Применив к последнему равенству оценку (23) и учтя, что

$$\int\limits_{l_s}^{\infty} \exp\left[-\alpha(\lambda)z\right] dz < \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left[-\alpha(\lambda)z\right] dz \leq 1,$$

получим (6).

Теорема 6 и в целом корректность математической модели КЛ доказаны. □

Заключение

Рассмотрены математические модели стационарной диффузии и катодолюминесценции неравновесных неосновных носителей заряда, генерируемых широким электронным пучком в однородных и многослойных полупроводниковых материалах. Использование широких электронных пучков позволяет свести эти задачи к одномерным и описать эти математические модели обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассмотрены следующие модели диффузии неравновесных неосновных носителей заряда в однородных полупроводниках: модель коллективного движения и модель независимых источников для полуограниченных мишеней — и модель, описывающая диффузионный процесс в многослойной полупроводниковой структуре конечной толщины, имеющей произвольное конечное число слоёв, а также модель катодолюминесценции, возникающей при излучательной рекомбинации генерированных электронным пучком неравновесных носителей заряда. Проведены доказательства единственности решений и непрерывной зависимости решений от данных задач. Получены оценки решений рассматриваемых задач, позволяющие использовать их в электронно–зондовых технологиях.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект No 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект No 18–41–400001).

Список литературы

1. Бонч–Бруевич, В. Л., Калашников, С. Г. Физика полупроводников: Учебн. пособие для вузов. — М.: Наука, Главная редакция физ.–мат. литературы, 1990. — 685 с.

   BONCH–BRUEVICH, V. L., and KALASHNIKOV, S. G. (1990) *The Physics of Semiconductors.* Moscow: Nauka. 685 pp. (in Russian)

2. Панков Ж. Оптические процессы в полупроводниках. — М.: Мир, 1973. — 384 с.

   PANKOVE, J. I. (2010) *Optical Processes in Semiconductors.* Dover Publications; 2nd revised ed. 448 pp.

3. YACOBI, B. G., HOLT, D. B. (1990) *Cathodoluminescence microscopy of inorganic solids.* Plenum Press, New York. 354 pp.

4. Степович, М. А. Количественная катодолюминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники: Дис. ... д–ра физ.–мат. наук (01.04.07). — М.: Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2003. — 351 с.

   STEPOVICH, M. A. (2003) *Quantitative Cathodoluminescent Microscopy of Direct–Gap Materials of Semiconductor Optoelectronics. Thesis Dr. Phys.–Math. Sci.* Moscow: Bauman Moscow State Technical University. 351 pp. (in Russian)

5. Броудай, И., Мерей, Дж. Физические основы микротехнологии. — М.: Мир, 1985. — 496 с.

   BRODIE, IVOR, MURAY, JULIUS J. (1982) *The Physics of Microfabrication.* Plenum Press, New York and London: SRI International (formerly Stanford Research Institute). 504 pp.

6. Брандон, Д., Каплан, У. Микроструктура материалов. Методы исследования и контроля. — М.: Техносфера, 2004. — 377 с.

   BRANDON, DAVID, KAPLAN WAYNE D. (2013) *Microstructural Characterization of Materials.* 2nd Ed. John Wiley & Sons Ltd.. 552 pp.

7. Растровая электронная микроскопия для нанотехнологий. Методы и применение / Под ред. У. Жу и Ж. Л. Уанга. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 582 с.

   Ed. by Weili ZHOU and Zhong Lin WANG. (2006) *Scanning Microscopy for Nanotechnology. Technicues and Applications.* Springer Science+Business Media, LLC. 522 pp.

8. Поляков, А. Н., Степович, М. А., Туртин, Д. В. Математическое моделирование катодолюминесценции экситонов, генерированных узким электронным пучком в полупроводниковом материале // Известия РАН. Серия физическая. — 2016. — Т. 80, № 12. — С. 1629–1633.

   POLYAKOV, A. N., STEPOVICH, M. A., TURTIN, D. V. (2016) Mathematical modeling of the cathodoluminescence of excitons generated by a narrow electron beam in a semiconductor material. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* 80 (12). p. 1436–1440.

9. POLYAKOV, A. N., SMIRNOVA, A. N., STEPOVICH, M. A., TURTIN, D. V. (2018) Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 39(2). p. 259–262.

10. STEPOVICH, MIKHAIL A. Turtin, Dmitry V., Seregina, Elena V., Kalmanovich, Veronika V. (2019) On the correctness of mathematical models of time–of–flight cathodoluminescence of direct–gap semiconductors. *ITM Web of Conferences.* 30. p. Art. No. 07014.

11. STEPOVICH, M. A., TURTIN, D. V., SEREGINA, E. V., and POLYAKOV, A. N. (2019) On the qualitative characteristics of a two–dimensional mathematical model of diffusion of minority charge carriers generated by a low–energy electron beam

in a homogeneous semiconductor material. *Journal of Physics: Conf. Series.* 1203. p. Art. No. 012095.

12. TURTIN, D. V., SEREGINA, E. V., STEPOVICH, M. A. (2020) Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material. *Journal of Mathematical Sciences.* 250(1). p. 166–174.

13. Туртин, Д. В., Серегина, Е. В., Степович, М. А. Качественный анализ одного класса дифференциальных уравнений тепломассопереноса в конденсированном веществе // Проблемы математического анализа: Межвузовский сборник. — 2020. — Вып. 104. — С. 149–156.

    TURTIN, D. V., SEREGINA, E. V., STEPOVICH, M. A. (2020) Qualitative analysis of one class of differential equations of heat and mass transfer in condensed matter. *Problems of Mathematical Analysis: Interuniversity Collection [Problemy matematicheskogo analiza: Mezhvuzovskiy sbornik].* (104). p. 149–156. (in Russian)

14. Филачев, А. М., Таубкин, И. И., Тришенков, М. А. Твердотельная фотоэлектроника. Фотодиоды. — М.: Физматкнига, 2011. — 448 с.

    FILACHEV, A. M., TAUBKIN, I. I., TRISHENKOV, M. A. (2011) *Solid-state photoelectronics. Photodiodes.* Moscow: Fizmatkniga. 448 pp. (in Russian)

15. Филачев, А. М., Таубкин, И.И., Тришенков, М. А. Твердотельная фотоэлектроника. Фоторезисторы и фотоприёмные устройства. — М.: Физматкнига, 2012. — 368 с.

    FILACHEV, A. M., TAUBKIN, I. I., TRISHENKOV, M. A. (2012) *Solid–state photoelectronics. Photoresistors and photodetectors.* Moscow: Fizmatkniga. 368 pp. (in Russian)

16. Алексеев Алексей, Красовицкий Дмитрий, Петров Станислав, Чалый Виктор. Многослойные гетероструктуры AlN/AlGaN/GaN/AlGaN — основа новой компонентной базы твердотельной СВЧ–электроники // Компоненты и технологии. — 2008. — № 2. — С. 138–142.

    ALEXEEV, ALEXEI, KRASOVITSKII, DMITRII, PETROV, STANISLAV, TCHALII, VIKTOR (2016) Multi–layered heterostructure AlN/AlGaN/GaN/AlGaN — the basis of the new component base of the solid–state circuit. *Equipment and technology [Komponenti i tekhnologii].* (2). p. 138–142.(in Russian)

17. Долгий А. Л., Писаренко Н. С., Бондаренко В. П. Гетероэпитаксиальные пленки нитрида галлия на пористом кремнии // Материалы и структуры современной электроники: Материалы IX международной научной конференции (14–16 октября 2020 г., г. Минск, Белорусский государственный университет). — Минск: БГУ, 2020. — С. 45–50.

    DOLGII, A. L., PISARENKO, N. S., BONDARENKO, V. P. (2020) Heteroepitaxial films of gallium nitride on porous silicon. *Materials and structures of modern electronics: Materials of the international conference (October 14-16, 2020, Minsk, Belarusian State University) [Materialy i struktury sovremennoy elektroniki: Materialy mezhdunarodnoy konferentsii (14–16 oktyabrya 2020, Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet)].* p. 45–50.(in Russian)

18. Михеев, Н. Н., Никоноров, И. М., Петров, В. И., Степович, М. А. Определение электрофизических параметров полупроводников в растровом электронном микроскопе методами наведенного тока и катодолюминесценции // Известия АН СССР. Серия физическая. — 1990. — Т. 54, № 2. — С. 274–280.

    MIKHEEV, N. N., NIKONOROV, I. M., PETROV, V. I., STEPOVICH, M. A. (1990) Determining the Electro–physical Parameters of Semiconductors in a Raster Electron Microscope by the Induced–Current and Cathodoluminescence Methods. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physical Series.* 54 (2). p. 82–88.

19. Михеев, Н. Н., Петров, В. И., Степович, М. А. Количественный анализ материалов полупроводниковой оптоэлектроники методами растровой электронной микроскопии // Известия РАН. Серия физическая. — 1991. — Т. 55, № 8. — С. 1474–1482.

    MIKHEEV, N. N., PETROV, V. I., STEPOVICH, M. A. (1991) Quantitative Analysis of Semiconductor Optoelectronic Materials by Raster Electron Microscopy. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physical Series.* 55 (8). p. 1–9.

20. Михеев, Н. Н., Степович, М. А. Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 1996. — Т. 62, № 4. — С. 20–25.

    MIKHEEV, N. N., STEPOVICH, M. A. (1996) Distribution of Energy Losses in Interaction of an Electron Probe with Material. *Industrial Laboratory.* 62 (4). p. 221–226.

21. WITTRY, D. B., KYSER, D. F. (1967) Measurements of diffusion lengths in direct–gap semiconductors by electron beam excitation. *J. Appl. Phys.* 38(1). p. 375–382.

22. KYSER, D. F., WITTRY, D. B. (1967) Spatial distribution of excess carriers in electron–beam excited semiconductors. *J. Proc. IEEE.* 55(3). p. 733–734.

23. RAO–SAHIB, T. S., WITTRY, D.B. (1969) Measurements of diffusion lengths in p–type gallium arsenide by electron beam excitation. *J. Appl. Phys.* 40(9). p. 3745–3750.

24. ROOSBROECK, VAN W. (1955) Injected current transport in semi–infinite semiconductor and determination of lifetimes and surface recombination velosities. *J. Appl. Phys.* 26(1). p. 380–387.

25. Белов, А. А., Петров, В. И., Степович, М. А. Использование модели независимых источников для расчета распределений неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком // Известия РАН. Серия физическая. — 2002. — Т. 66, № 9. — С. 1317–1322.

    BELOV, A. A., PETROV, V. I., STEPOVICH, M. A. (2002) Model of independent sources used in calculation of minority charge carriers generated by electron beam in semiconductor. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Ser. Fizicheskaya.* 66 (9). p. 1317–1323.

26. Степович, М. А., Снопова, М. Г., Хохлов, А. Г. Использование модели независимых источников для расчёта распределения неосновных носителей заряда, генерированных в двухслойном полупроводнике электронным пучком // Прикладная физика. — 2004. — № 3. — С. 61–65.

    STEPOVICH, M. A., KHOKHLOV, A. G., SNOPOVA, M. G. (2004) Model of independent sources used for calculation of distribution of minority charge carriers generated in two–layer semiconductor by electron beam. *Applied Physics [Prikladnaya fizika].* (3). p. 61–65.(in Russian)

27. STEPOVICH, M. A., KHOKHLOV, A. G., SNOPOVA, M. G. (2004) Model of independent sources used for calculation of distribution of minority charge carriers generated in two–layer semiconductor by electron beam. *Proc. SPIE.* 5398. p. 159–165.

28. Burylova, I. V., Petrov, V. I., Snopova, M. G., Stepovich, M. A. Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in multy–layer semiconducting structure by a wide electron beam // Физ. и техн. полупроводников. — 2007. — Т. 41, вып. 4. — С. 458–461.

    BURYLOVA, I. V., PETROV, V. I., SNOPOVA, M. G., STEPOVICH, M. A. (2007) Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in multy–layer semiconducting structure by a wide electron beam. *Semiconductors.* 41(4). p. 444–447.

29. Снопова, М. Г., Бурылова, И. В., Петров, В. И., Степович, М. А. Анализ модели распределений неосновных носителей заряда, генерированных в трёхслойной полупроводниковой структуре широким электронным пучком // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2007. — № 7. — С. 1–6.

    SNOPOVA, M. G., BURYLOVA, I. V., PETROV, V. I., STEPOVICH, M. A. (2007) Analysis of a Model of Minority Charge–Carrier Distributions Generated in a Three–Layer Semiconductor Structure by a Wide Electron Beam. *Journal of Surface Investigation. X–ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* 1(4). p. 406-410.

30. Степович, М. А., Серегина, Е. В., Калманович, В. В. О некоторых аспектах математического моделирования процессов тепломассопереноса, обусловленного облучением киловольтными электронами // Сборник материалов XXX Крымской осенней математической школы–симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (17–29 сентября 2019 г., пос. Батилиман, Республика Крым, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского). — Симферополь: Полипринт, 2019. — С. 282–285.

    STEPOVICH, M. A., SEREGINA, E. V., KALMANOVICH, V. V. (2019) About some aspects of mathematical modeling of heat and mass transfer processes due to irradiation with kilovolt electrons. *Proceedings of the XXXth Crimean Autumn Mathematical School–Symposium on Spectral and Evolutionary Problems (September 17–19, 2019, Settlement Batiliman, Republic of Crimea, V. I. Vernadsky Crimean Federal University). — Simferopol: Polyprint.* p. 282–285.(in Russian)

31. Серегина, Е. В., Калманович, В. В., Степович, М. А. О моделировании распределений неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в многослойных планарных полупроводниковых структурах // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2020. — № 7. — С. 69–74.

    SEREGINA, E. V., KALMANOVICH, V. V., STEPOVICH, M. A. (2020) On Modeling the Distributions of Minority Charge Carriers Generated by a Wide Electronic Beam in Planar Multilayer Semiconductor Structures. *Journal of Surface Investigation. X–ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* 14(4). p. 713–717.

32. Калманович, В. В., Серегина, Е. В., Степович, М. А. Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Известия РАН. Серия физическая. — 2020. — Т. 84, № 7. — С. 1020–1026.

    KALMANOVICH, V. V., SEREGINA, E. V., STEPOVICH, M. A. (2020) Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Phenomena Caused by Interaction between Electron Beams and Planar Semiconductor Multilayers. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* 84(7). p. 844–850.

33. KALMANOVICH, V. V., SEREGINA, E. V., STEPOVICH, M. A. (2020) Comparison of analytical and numerical modeling of distributions of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide beam of medium–energy electrons in a two–layer semiconductor structure. *Journal of Physics: Conf. Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems.* 1479. p. Art. No. 012116.

34. Степович, М. А., Калманович, В. В., Серегина, Е. В. О возможности приложения матричного метода к моделированию катодолюминесценции, обусловленной широким электронным пучком в планарной многослойной полупроводниковой структуре // Известия РАН. Серия физическая. — 2020. — Т. 84, № 5. — С. 700–703.

    STEPOVICH, M. A., KALMANOVICH, V. V., SEREGINA, E. V. (2020) Possibility of Applying the Matrix Approach to Modeling the Cathodoluminscescence Caused by a Wide Electron Beam in a Planar Multilayer Semiconductor Structure. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* 84(5). p. 576–579.