УДК: 517.98, 517.15

MSC2010: 47A10, 26A12 **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-2-12-23**

О СВЯЗИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ СЧИТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ И ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ КОМПАКТНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© В. И. Войтицкий

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского

Таврическая академия

факультет математики и информатики

просп. акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация

e-mail: victor.voytitsky@gmail.com

On connection of asymptotic formulas for the counting function and for the characteristic numbers of a compact positive operator.

Voytitsky V. I.

Abstract.

Let operator G be compact positive operator acting in separable Hilbert space. According with theorem of Hilbert-Schmidt its characteristic numbers μ_n are positive finite multiple with unique limit point at infinity. In spectral problems of mathematical physics such numbers, as a rule, have power (Weyl's) asymptotic. Sometimes it is more convenient to use asymptotic of counting function $N(r)$ that is equal to number (taking into account the multiplicity) of characteristic numbers μ_n in the interval $(0;r)$. For single eigenvalues recalculation of asymptotic formulas is a simple exercise. We prove several theorems on connection between asymptotic of μ_n and $N(r)$ for an arbitrary compact positive operator G.

Theorem 1. If $\mu_n = an^\alpha(1+o(1)),\ n\to\infty$, where $\alpha>0$, then

$$N(r) = a^{-1/\alpha}r^{1/\alpha}(1+o(1)), \quad r\to+\infty.$$

Theorem 2. If $N(r) = ar^\alpha(1+o(1)),\ r\to+\infty,\ \alpha>0$, then

$$\mu_n = a^{-1/\alpha}n^{1/\alpha}(1+o(1)),\ n\to\infty.$$

Theorem 3. If $\mu_n = an^\alpha + O(n^\beta),\ n\to\infty$, where $\alpha>\beta\geq\alpha-1, \quad \alpha>0$, then

$$N(r) = a^{-1/\alpha}r^{1/\alpha} + O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad r\to+\infty.$$

Theorem 4. If $N(r) = ar^\alpha + O(r^\beta),\ r\to+\infty$, where $\alpha>\beta\geq 0$, then

$$\mu_n = a^{-1/\alpha}n^{1/\alpha} + O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad n\to\infty.$$

As an application we study asymptotic of a diagonal operator-matrix $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ if it is known the power asymptotic of operators A and B.

Keywords: *compact operator, infinitely large sequence, subsequence, power asymptotic, Landau symbols.*

1. Введение

Как известно ненулевой спектр компактного самосопряжённого оператора, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, состоит из действительных собственных значений конечной кратности с единственной возможной предельной точкой в нуле (см., например, [1], п. 9.2). Если дополнительно оператор имеет нулевое ядро, то система соответствующих собственных функций образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве. Эти важные результаты являются основой спектральной теории линейных операторов и известны как теорема Гильберта-Шмидта.

Если компактный самосопряжённый оператор G в бесконечномерном гильбертовом пространстве имеет обратный $A = G^{-1}$, то последний является неограниченным, при этом его спектр состоит из изолированных конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности. В этом случае говорят, что оператор A имеет дискретный спектр. Резольвента оператора с дискретным спектром $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ в каждой регулярной точке λ является компактным оператором.

Многие задачи математической физики приводят к самосопряжённым операторам с дискретным спектром, при этом для приложений кроме свойства базисности важным является конкретный вид асимптотики собственных значений. Как правило краевые задачи имеют степенную (или Вейлевскую) асимптотику собственных значений с известной оценкой остаточного члена в виде символов Ландау (О-большое, о-малое). Например, собственные значения оператора Лапласа с условиями Дирихле или Неймана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, допускающей разделение переменных (см. [2], с. 33), имеют асимптотику

$$N(r) = ar^{m/2} + br^{(m-1)/2} + o(r^{(m-1)/2}), \quad r \to +\infty, \tag{1}$$

где через $N(r)$ обозначено число собственных значений (с учетом кратности), лежащих в интервале $(0; r)$. При этом константа $a > 0$ зависит лишь от меры области Ω, а константа b зависит лишь от меры границы области $\partial\Omega$ ($b < 0$ для задачи Дирихле и $b > 0$ для задачи Неймана). В случае произвольной ограниченной области Ω (см. [2], с. 19) можно утверждать лишь, что

$$N(r) = ar^{m/2}(1 + o(1)), \quad r \to +\infty. \tag{2}$$

Напомним, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

В работах Н. Д. Копачевского (см. [3], с. 79), А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [4], с. 146) без предъявления доказательства утверждается, что асимптотика считающей функции (2) равносильна асимптотике для собственных значений

$$\lambda_n = a^{-2/m} n^{2/m} (1 + o(1)), \quad n \to +\infty. \tag{3}$$

По мнению автора статьи этот вывод действительно прост в случае однократных собственных значений, при этом если собственные значения кратные, то доказательство перестаёт быть тривиальным.

В работе приводится ряд теорем о переводе асимптотических формул для считающей функции в асимптотические формулы для характеристических чисел компактного самосопряжённого оператора и наоборот. В частности, доказывается равносильность формул вида (2) и (3), а также формулы пересчета для асимптотик вида $N(r) = ar^\alpha + O(r^\beta)$ или $\lambda_n = an^\alpha + O(n^\beta)$ для $\beta < \alpha$.

2. Формулы, содержащие только главный член асимптотики

Пусть $G = G^* > 0$ данный абстрактный компактный положительный оператор, действующий в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots \tag{4}$$

— счетный набор его положительных характеристических чисел, расположенных по неубыванию с учетом кратности. Эти числа являются собственными значениями обратного оператора $A = G^{-1}$, т.е. для каждого μ_k существует ненулевая функция $u_k \in H$ такая, что $Au_k = \mu_k u_k$. Согласно теореме Гильберта-Шмидта функции u_k можно выбрать ортонормированными, при этом

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = +\infty,$$

и в цепочке неравенств (4) равенства возможны лишь в конечных группах. Количество собственных значений в каждой группе равно кратности собственного значения (алгебраическая кратность для самосопряженного оператора равна геометрической). При этом кратность совпадает с размерностью собственного подпространства, являющегося линейной оболочкой всех собственных функций, отвечающих данному собственному значению.

Перейдем от набора (4) к подпоследовательности собственных значений без учета кратности. Для этого в каждой группе равных собственных значений нужно выбрать по одному представителю. Для удобства выберем подпоследовательность μ_{n_k} последовательности (4) так, чтобы n_k являлись минимальными индексами. Тогда номер k

отвечает за номер собственного значения без учета кратности. Обозначим через ν_k — последовательность кратностей. Например, для последовательности собственных значений

$$1 \le 2 \le 2 \le 3 \le 3 \le 3 \le 4 \le 4 \le 4 \le 4 \le 5 \dots$$

имеем $\nu_k = k$, $\mu_{n_k} = k$, поэтому $n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 4,\ n_4 = 7,\ n_5 = 11, \dots$. Отметим, что для краевых задач в размерностях 2 и выше последовательность ν_k может быть неограниченной (см., например, [5]).

Введем считающую функцию $N(r)$ как число собственных значений μ_n, лежащих в интервале $(0; r)$. Тогда, согласно определению

$$N(\mu_{n_k}) = n_k - 1, \tag{5}$$

причем $N(\mu_n) = n - 1$ верно лишь для тех натуральных n, которые являются членами подпоследовательности n_k. Действительно, в примере выше $N(1) = N(\mu_1) = 0,\ N(2) = N(\mu_2) = N(\mu_3) = 1,\ N(3) = N(\mu_4) = N(\mu_5) = N(\mu_6) = 3,$ $N(4) = N(\mu_7) = 6, \dots$.

Теорема 1 (прямая)**.** *Пусть* $\mu_n = an^{\alpha}(1 + o(1)),\ n \to \infty$*, где* $\alpha > 0$*, тогда*

$$N(r) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)), \quad r \to +\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Переходя к подпоследовательности n_k, получаем асимптотику $\mu_{n_k} = an_k^{\alpha}(1 + o(1)),\ k \to \infty$. Следовательно

$$n_k \sim a^{-1/\alpha} \mu_{n_k}^{1/\alpha},\ k \to \infty.$$

Отсюда с учетом формулы (5) получаем, что $N(\mu_{n_k}) + 1 \sim a^{-1/\alpha}\mu_{n_k}^{1/\alpha},\ k \to \infty$.

Так как функция $N(r)$ является кусочно-постоянной и имеет скачки лишь в точках μ_{n_k}, то

$$N(r) + 1 \sim a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha},\ r \to \infty.$$

Отсюда с учётом $\alpha > 0$ получаем формулу (6). □

Теорема 2 (обратная)**.** *Пусть*

$$N(r) = ar^{\alpha}(1 + o(1)), \quad r \to +\infty, \quad \alpha > 0, \tag{7}$$

тогда $\mu_n = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}(1 + o(1)),\ n \to \infty$.

Доказательство. Подставим в формулу (7) $r = \mu_{n_k}$, тогда с учётом (5) получаем

$$n_k - 1 = N(\mu_{n_k}) = a\mu_{n_k}^{\alpha}(1 + o(1)), \quad k \to \infty. \tag{8}$$

Отсюда

$$\mu_{n_k}^{\alpha} \sim a^{-1} n_k, \quad k \to \infty, \tag{9}$$

т.е. мы доказали нужную асимптотическую формулу для подпоследовательности μ_{n_k}. В случае однократных собственных значений теорема является доказанной.

В общем случае, чтоб доказать теорему для последовательности μ_n, выберем некоторую бесконечно малую последовательность из положительных чисел ε_k так, чтобы $\mu_{n_k+1} < \mu_{n_k} + \varepsilon_k$ (это можно сделать в силу дискретности спектра). Тогда по определению считающей функции $N(r)$ с учетом формул (5) и (8) получаем, что

$$N(\mu_{n_k} + \varepsilon_k) = \nu_k + n_k - 1 = \nu_k + a\mu_{n_k}^{\alpha}(1 + o(1)), \quad k \to \infty,$$

где ν_k — кратность собственного значения μ_{n_k}. С другой стороны из формулы (7) следует, что

$$N(\mu_{n_k} + \varepsilon_k) = a(\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^{\alpha}(1 + o(1)), \quad k \to \infty.$$

Таким образом $\nu_k + a\mu_{n_k}^{\alpha}(1 + o(1)) = a(\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^{\alpha}(1 + o(1)),\ k \to \infty$, и мы получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k}{\mu_{n_k}^{\alpha}} + a = a \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\mu_{n_k} + \varepsilon_k}{\mu_{n_k}}\right)^{\alpha}.$$

Предел в правой части равен единице, т.к. $\varepsilon_k/\mu_{n_k} \to 0,\ k \to \infty$. Следовательно

$$\nu_k = o(\mu_{n_k}^{\alpha}) = o(n_k), \quad k \to \infty. \tag{10}$$

Далее, заметим, что любое натуральное число n представимо в виде $n = n_k + p(k)$, где $p(k)$ — поправочная функция, значения которой являются целыми числами из отрезка $[0; \nu_k - 1]$, при этом $\mu_n = \mu_{n_k}$. Отсюда

$$n_k \le n \le n_k + \nu_k - 1;$$

$$\frac{a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha}}{\mu_{n_k}} \le \frac{a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}}{\mu_n} \le \frac{a^{-1/\alpha}(n_k + \nu_k - 1)^{1/\alpha}}{\mu_{n_k}}.$$

С учетом свойств (9) и (10) левая и правая части двойного неравенства сходятся к единице при $k \to \infty$. Значит при $n \to \infty$ центральная часть неравенства тоже сходится к единице. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Иногда считающую функцию $N(r)$ вводят как число собственных значений на отрезке $[0; r]$. При этом результаты теорем 1 и 2 останутся верными. В этом случае удобно рассмотреть подпоследовательность μ_{n_k}, состоящую из различных собственных значений с максимальными индексами n_k. Тогда формула (5) будет иметь вид $N(\mu_{n_k}) = n_k$, доказательство теоремы 1 полностью сохраняется, а в теореме 2 нужно использовать соотношение $N(\mu_{n_k} - \varepsilon_k) = n_k - \nu_k$. При этом, если $\mu_n = \mu_{n_k}$, то $n = n_k - p(k)$, где $p(k) \in [0; \nu_k - 1]$.

3. Формулы с уточненным остаточным членом

Пусть теперь в рамках теоремы 1 собственные значения μ_n имеют степенную асимптотику с оценкой остаточного члена в терминах символа Ландау O-большое. Будем говорить, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to +\infty$, если на некотором луче $(x_0; +\infty)$ существует константа $C > 0$ такая, что для всех $x > x_0$ выполнено $|f(x)| \leq C|g(x)|$. Тогда можно уточнить оценку остаточного члена считающей функции.

Теорема 3 (прямая)**.** *Пусть* $\mu_n = an^\alpha + O(n^\beta),\ n \to \infty$, *где*

$$\alpha > \beta \geq \alpha - 1, \quad \alpha > 0, \tag{11}$$

тогда

$$N(r) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha} + O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad r \to +\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку из условий теоремы следует справедливость теоремы 1, то

$$N(r) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha} + \xi(r),$$

где $\xi(r) = o(r^{1/\alpha})$. Наша цель — доказать, что $\xi(r) = O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}})$.

Перейдя к подпоследовательности μ_{n_k} различных собственных значений с минимальными индексами n_k, с учетом формулы $N(\mu_{n_k}) = n_k - 1$ получаем, что

$$\mu_{n_k} - an_k^\alpha = \mu_{n_k} - a(N(\mu_{n_k}) + 1)^\alpha = O(n_k^\beta), \quad k \to \infty.$$

Так как $\alpha > \beta$, то $\mu_{n_k} \sim an_k^\alpha$, а значит $n_k \sim a^{-1/\alpha}\mu_{n_k}^{1/\alpha}$ и мы получаем

$$\mu_{n_k} - a(N(\mu_{n_k}) + 1)^\alpha = O(\mu_{n_k}^{\beta/\alpha}), \quad k \to \infty.$$

Последнее равносильно соотношению

$$r - a(N(r) + 1)^\alpha = r - O(r^{\beta/\alpha}), \quad r \to \infty.$$

Преобразуем выражение в левой части равенства

$$r - a(N(r) + 1)^\alpha = r - a(a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha} + \xi(r) + 1)^\alpha = r - (r^{1/\alpha} + a^{1/\alpha}(\xi(r) + 1))^\alpha =$$

$$= r - r(1 + a^{1/\alpha} r^{-1/\alpha}(\xi(r) + 1))^\alpha = r - r(1 + \varphi(r))^\alpha.$$

Здесь функция $\varphi(r) := a^{1/\alpha} r^{-1/\alpha}(\xi(r) + 1) = o(1),\ r \to \infty$, так как $\xi(r) = o(r^{1/\alpha})$. Отсюда

$$r - r(1 + \varphi(r))^\alpha = r - r[1 + \alpha\varphi(r) + o(\varphi(r))] = -r\alpha\varphi(r) + ro(\varphi(r)) = O(r^{\beta/\alpha}).$$

После деления обеих частей на r получаем

$$-\alpha\varphi(r)(1 + o(1)) = O(r^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}),$$

т.е. $\varphi(r)=a^{1/\alpha}r^{-1/\alpha}(\xi(r)+1)=O(r^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}})$. Следовательно

$$\xi(r)=-1+O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}).$$

Из условия (11) следует, что $1+\beta-\alpha\geq 0$. Так как $1=O(r^{\gamma})$ для любого $\gamma\geq 0$, то $\xi(r)=O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}})$. Что и требовалось доказать. □

Замечание 2. Можно заметить, что данная теорема останется верной при замене оценок в асимптотиках на o-малое, если $\alpha>\beta>\alpha-1$. То есть из соотношения $\mu_n=an^{\alpha}+o(n^{\beta}),\ n\to\infty$, следует что $N(r)=a^{-1/\alpha}r^{1/\alpha}+o(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}),\ r\to+\infty$.

Оценки с O-большим и o-малым останутся верными, если считающую функцию $N(r)$ ввести как число собственных значений на отрезке $[0;r]$. Тогда для подпоследовательности μ_{n_k}, состоящей из различных собственных значений с максимальными индексами n_k, получим $N(\mu_{n_k})=n_k$. Доказательство теоремы 3 почти не изменится и, по-видимому, условие $\beta\geq\alpha-1$ можно опустить.

Теорема 4 (обратная). *Пусть*

$$N(r)=ar^{\alpha}+O(r^{\beta}),\quad r\to+\infty, \tag{13}$$

где $\alpha>\beta\geq 0$, *тогда* $\mu_n=a^{-1/\alpha}n^{1/\alpha}+O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}),\quad n\to\infty.$

Доказательство. Поскольку из условий теоремы следует справедливость теоремы 2, то

$$\mu_n=a^{-1/\alpha}n^{1/\alpha}(1+o(1))=a^{-1/\alpha}n^{1/\alpha}+\xi(n),\quad n\to\infty,$$

где $\xi(n)=o(n^{1/\alpha})$. Докажем, что $\xi(n)=O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}),\ n\to\infty$.

Сначала докажем данное свойство на подпоследовательности μ_{n_k}, для которой $N(\mu_{n_k})=n_k-1$. Действительно, согласно формуле (13) при $r=\mu_{n_k}$ получаем

$$N(\mu_{n_k})=n_k-1=a\mu_{n_k}^{\alpha}+O(\mu_{n_k}^{\beta}),\quad k\to\infty. \tag{14}$$

Так как $\mu_{n_k}\sim a^{-1/\alpha}n_k^{1/\alpha}$, то отсюда

$$n_k-1=a(a^{-1/\alpha}n_k^{1/\alpha}+\xi(n_k))^{\alpha}+O(n_k^{\beta/\alpha}).$$

Значит

$$n_k-1-(n_k^{1/\alpha}+a^{1/\alpha}\xi(n_k))^{\alpha}=n_k-1-n_k(1+a^{1/\alpha}n_k^{-1/\alpha}\xi(n_k))^{\alpha}=$$
$$=n_k-1-n_k(1+\varphi(n_k))^{\alpha}=O(n_k^{\beta/\alpha}),$$

где функция $\varphi(n_k):=a^{1/\alpha}n_k^{-1/\alpha}\xi(n_k)=o(1)$ в силу свойства $\xi(n)=o(n^{1/\alpha})$. Таким образом

$$n_k-1-n_k(1+\alpha\varphi(n_k)+o(\varphi(n_k)))=-n_k\alpha\varphi(n_k)(1+o(1))=O(n_k^{\beta/\alpha}),\quad k\to\infty.$$

Отсюда следует, что $\varphi(n_k) = a^{1/\alpha} n_k^{-1/\alpha} \xi(n_k) = O(n_k^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}})$, т.е. $\xi(n_k) = O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}})$.

Оценим рост последовательности кратностей ν_k. Для этого выберем как в теореме 2 некоторую бесконечно малую последовательность из положительных чисел ε_k так, чтобы $\mu_{n_k+1} < \mu_{n_k} + \varepsilon_k$. Тогда по определению считающей функции $N(r)$ с учетом (13) получаем, что

$$N(\mu_{n_k} + \varepsilon_k) = \nu_k + n_k - 1 = a(\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^\alpha + O((\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^\beta), \quad k \to \infty.$$

Следовательно с учетом формулы (14) имеем

$$a\mu_{n_k}^\alpha + O(\mu_{n_k}^\beta) + \nu_k = a(\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^\alpha + O((\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^\beta), \quad k \to \infty.$$

Так как последовательность ε_k можно выбрать сколь угодно быстро стремящейся к нулю, то отсюда $\nu_k = O(\mu_{n_k}^\beta),\ k \to \infty$.

Для завершения доказательства (аналогично теореме 2) воспользуемся тем фактом, что любое натуральное число n представимо в виде $n = n_k + p(k)$, где $\mu_n = \mu_{n_k}$, $p(k)$ — поправочная функция, удовлетворяющая двойному неравенству $0 \le p(k) \le \nu_k - 1$. Тогда с учетом неравенства $\beta \ge 0$ выполнено свойство $\nu_k - 1 = O(\mu_{n_k}^\beta)$, следовательно $p(k) = O(\mu_{n_k}^\beta),\ k \to \infty$. Так как $\mu_{n_k} \sim a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha}$, то в силу неравенства $\beta < \alpha$ имеем $p(k) = O({n_k}^{\beta/\alpha}) = o(n_k),\ k \to \infty$. Отсюда получаем, что

$$O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}) = O((n_k + p(k))^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}) = O((n_k(1 + o(1)))^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}) = O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad k \to \infty.$$

Так как функция $\varphi(k) = p(k)/n_k = O(n_k^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}) = o(1),\ k \to \infty$, то

$$n^{1/\alpha} = (n_k + p(k))^{1/\alpha} = n_k^{1/\alpha}(1 + \varphi(k))^{1/\alpha} = n_k^{1/\alpha}[1 + (1/\alpha)\varphi(k) + o(\varphi(k))] =$$
$$= n_k^{1/\alpha} + (1/\alpha) n_k^{1/\alpha} \varphi(k)(1 + o(1)) = n_k^{1/\alpha} + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad k \to \infty.$$

Следовательно асимптотика $\mu_n = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha} + O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}),\ n \to \infty$, равносильна соотношению

$$\mu_{n_k+p(k)} = a^{-1/\alpha}\left(n_k^{1/\alpha} + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}})\right) + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}) = a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha} + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad k \to \infty.$$

Последнее выполнено в силу того, что $\mu_n = \mu_{n_k+p(k)} = \mu_{n_k}$ и согласно доказанному ранее

$$\mu_{n_k} = a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha} + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad k \to \infty.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Теорема останется верной при замене оценок в асимптотиках на o-малое, если $\alpha > \beta > 0$. Эти результаты сохранятся, если считающую функцию $N(r)$ ввести как число собственных значений на отрезке $[0; r]$.

4. Асимптотика характеристических чисел диагональной операторной матрицы

В качестве приложения доказанных теорем рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется операторная диагональная матрица

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где A и B являются положительными компактными операторами с заданной асимптотикой характеристических чисел, пронумерованных по неубыванию с учетом кратности. Исследуем асимптотической поведение характеристических чисел $\mu_n(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$.

Утверждение 1. *Пусть*

$$\mu_n(A) = an^{\alpha}(1 + o(1)), \quad \mu_n(B) = bn^{\beta}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \tag{16}$$

тогда в случае $\alpha = \beta$ имеем

$$\mu_n(\mathscr{A}) = (a^{-1/\alpha} + b^{-1/\alpha})^{-1/\alpha} n^{\alpha}(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Если $\alpha \neq \beta$, то асимптотика $\mu_n(\mathscr{A})$ совпадает с асимптотикой того из операторов A и B, у которого показатель степени меньше.

Доказательство. На основании теоремы 1 из формул (16) следует асимптотика считающих функций

$$N(A) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)), \quad N(B) = b^{-1/\beta} r^{1/\beta}(1 + o(1)), \quad r \to \infty. \tag{18}$$

Так как множество характеристических чисел оператора $\mathscr{A}$ является объединением множеств характеристических чисел операторов A и B, то

$$N(\mathscr{A}) = N(A) + N(B) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)) + b^{-1/\beta} r^{1/\beta}(1 + o(1)), \quad r \to \infty. \tag{19}$$

Отсюда в случае $\alpha = \beta$ получаем, что

$$N(\mathscr{A}) = N(A) + N(B) = (a^{-1/\alpha} + b^{-1/\alpha}) r^{1/\alpha}(1 + o(1)), \quad r \to \infty.$$

Применяя теперь теорему 2, получаем асимптотическую формулу (17).

В случае $\alpha \neq \beta$ будем считать для определенности, что $\alpha < \beta$. Тогда $r^{1/\beta} = o(r^{1/\alpha}),\ r \to \infty$ и из формулы (19) получаем, что

$$N(\mathscr{A}) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)), \quad r \to \infty.$$

Отсюда на основании теоремы 2 получаем, что $\mu_n(\mathscr{A}) = an^{\alpha}(1 + o(1)),\ n \to \infty$, т.е. $\mu_n(\mathscr{A}) \sim \mu_n(A)$. □

Следствие 1. *При выполнении условий утверждения 1 операторы A и B лежат в классах Неймана-Шаттена (см. [6], стр. 120)*

$$A \in \mathfrak{S}_{p_A},\ p_A > 1/\alpha, \quad B \in \mathfrak{S}_{p_B},\ p_B > 1/\beta,$$

где класс $\mathfrak{S}_p$ определяется как множество компактных операторов, сингулярные числа которых суммируются со степенью p, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A) < \infty.$$

Для неотрицательных компактных операторов сингулярные числа совпадают с собственными значениями, которые согласно (16) *имеют асимптотику*

$$\lambda_n(A) = a_1 n^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad \lambda_n(B) = b_1 n^{-\beta}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \quad a_1 := a^{-1},\ b_1 := b^{-1}. \tag{20}$$

Согласно утверждению 1 в случае $\alpha < \beta$ имеем $\lambda_n(\mathscr{A}) \sim \lambda_n(A),\ n \to \infty$. Если же $\alpha = \beta$, то

$$\lambda_n(\mathscr{A}) = (a_1^{1/\alpha} + b_1^{1/\alpha})^{1/\alpha} n^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{21}$$

В общем случаем верно, что

$$\mathscr{A} \in \mathfrak{S}_p, \quad p > \max\{1/\alpha, 1/\beta\}.$$

Утверждение 2. *Пусть*

$$\mu_n(A) = an^{\gamma} + O(n^{\alpha}), \quad \mu_n(B) = bn^{\gamma} + O(n^{\beta}), \quad n \to \infty, \tag{22}$$

где $\gamma > 0,\ \gamma > \alpha \geq \gamma - 1,\ \gamma > \beta \geq \gamma - 1$, тогда

$$\mu_n(\mathscr{A}) = (a^{-1/\gamma} + b^{-1/\gamma})^{-1/\gamma} n^{\gamma} + O(n^{\delta}), \quad n \to \infty, \tag{23}$$

где $\delta = \max\{\alpha,\ \beta\}$.

Доказательство. На основании теоремы 3 имеем соотношения

$$N(A) = a^{-1/\gamma} r^{1/\gamma} + O(r^{\frac{1+\alpha-\gamma}{\gamma}}), \quad N(B) = b^{-1/\gamma} r^{1/\gamma} + O(r^{\frac{1+\beta-\gamma}{\gamma}}), \quad r \to \infty. \tag{24}$$

Тогда, обозначая $\delta = \max\{\alpha,\ \beta\}$, получаем

$$N(\mathscr{A}) = N(A) + N(B) = (a^{-1/\gamma} + b^{-1/\gamma})r^{1/\gamma} + O(r^{\frac{1+\delta-\gamma}{\gamma}}), \quad r \to \infty.$$

Отсюда, применяя теорему 4, получаем, что

$$\mu_n(\mathscr{A}) = (a^{-1/\gamma} + b^{-1/\gamma})^{-1/\gamma} n^{\gamma} + O(n^{\theta}), \quad n \to \infty,$$

где

$$\theta = \frac{1 + \frac{1+\delta-\gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma}} = \gamma + 1 + \delta - \gamma - 1 = \delta.$$

□

Список литературы

1. Бирман, М. Ш. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. — СПБ: Лань, 2010. — 458 с.

   BIRMAN, M. Sh. and SOLOMYAK, M. Z. (2010) *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilber space.* S.-Petersburg: Lan'.

2. Бирман, М. Ш. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. — 1977. — Т. 14. — С. 5–58.

   BIRMAN, M. Sh., Solomyak, M. Z. (1979) Asymptotic properties of the spectrum of differential equations. *J. Soviet Math.* Vol. 12, no. 3. p. 247–283.

3. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. and NGO ZUY CAN (1989) *Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems.* Moscow: Nauka.

4. Маркус, А. С. Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики / А. С. Маркус, В. И. Мацаев // Труды ММО. — 1982. — Т. 45. — С. 133–181.

   MARKUS, A. S. and MATSAEV, V. I (1982) Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*. Vol. 45. p. 133–181.

5. Надирашвили, Н. С Кратные собственные значения оператора Лапласа / Н. С. Надирашвили // Матем. сборник. — 1987. — Т. 133(175), номер 2 (6). — С. 223–237.

NADIRASHVILI, N. S (1988) Multiple eigenvalues of the Laplace operator. *Math. USSR-Sb.*. Vol. 61(1). p. 225–238.

6. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

   GOHBERG,I. Ts. and KREIN, M. G. (1965) *Introdution to the theory of linear non-selfadjoint operators.* Moscow: Nauka.