УДК: 517.927.4

MSC2010: 34B27 **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-2-65-87**

ОБ АНТИПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $2 < q < 3$[1]

© Г. Г. Петросян

Воронежский государственный университет инженерных технологий
Научно-образовательный центр
просп. Революции, 19, Воронеж, 394036, Российская Федерация
e-mail: *garikpetrosyan@yandex.ru*

On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of a fractional order $2 < q < 3$.

Petrosyan G. G.

Abstract. The investigation of control systems with nonlinear units forms a complicated and very important part of contemporary mathematical control theory and harmonic analysis, which has numerous applications and attracts the attention of a number of researchers around the world. In turn, the development of the theory of differential inclusions is associated with the fact that they provide a convenient and natural tool for describing control systems of various classes, systems with discontinuous characteristics, which are studied in various branches of the optimal control theory, mathematical physics, radio physics, acoustics etc. One of the best approaches to the study of this kind of problems is provided by the methods of multivalued and nonlinear analysis, which are distinguished as very powerful, effective and useful. However, the solving of these problems within the frameworks of existing theories is often a very difficult problem, since many of them find sufficiently adequate description in terms of differential equations and inclusions with fractional derivatives. The theory of differential equations of fractional order originates from the ideas of Leibniz and Euler, but only by the end of the XX century, interest in this topic increased significantly. In the 70s - 80s, this direction was greatly developed by the works of A. A. Kilbas, S. G. Samko, O. I. Marichev, I. Podlubny, K. S. Miller, B. Ross, R. Hilfer, F. Mainardi, H. M. Srivastava. Notice that the research in this direction will open up prospects and new opportunities for the studying of non-standard systems that specialists encounter while describing the development of physical and chemical processes in porous, rarefied and fractal media. It is known that a periodic boundary value problem is one of the classical boundary value problems of differential equations and inclusions. At the same time, in recent years, along with periodic boundary value problems, antiperiodic boundary value problems are of great interest due to their applications in physics and interpolation problems.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

In this paper, we study an antiperiodic boundary value problem for semilinear differential inclusions with Caputo fractional derivative of order $2 < q < 3$ in Banach spaces. We assume that the nonlinear part is a multivalued map obeying the conditions of the Caratheodory type, boundedness on bounded sets, and the regularity condition expressed in terms of measures of noncompactness. In the first section, we present a necessary information from fractional analysis, Mittag – Leffler function, theory of measures of noncompactness, and multivalued condensing maps. In the second section, we construct the Green's function for the given problem, then, we introduce into consideration a resolving multivalued integral operator in the space of continuous functions. The solutions to the boundary value problem are fixed points of the resolving multioperator. Therefore, we use a generalization of Sadovskii type theorem to prove their existence. Then, we first prove that the resolving multioperator is upper semicontinuous and condensing with respect to the two-component measure of noncompactness in the space of continuous functions. In a proof of a main theorem of the paper, we show that a resolving multioperator transforms a closed ball into itself. Thus, we obtain that the resolving multioperator obeys all the conditions of the fixed point theorem and we prove the existence of solutions to the antiperiodic boundary value problem.

Keywords: *differential inclusion, fractional derivative, antiperiodic boundary value problem, Green function, measure of noncompactness, fixed point, condensing multimap.*

Введение

В последние десятилетия значительное развитие получила теория дробного анализа и дифференциальных уравнений и включений дробного порядка. Интерес к этой тематике усилился не случайно, так как данная теория имеет многочленные приложения в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см. монографии [1]–[5]). На данный момент разработаны различные подходы к разрешимости дифференциальных уравнений и краевых задач для них, в случае дробного порядка $q \in (0, 1)$ (см. статьи [6]–[9] и имеющиеся в них ссылки). В последнее время активно исследуются дифференциальные уравнения и включения дробного порядка $q > 1$.

В тоже время в последние годы на ряду с периодическими краевыми задачами большой интерес представляют антипериодические краевые задачи благодаря приложениям в физике и в интерполяционных задачах (см., например, работы [10]–[12] и имеющиеся в них ссылки). Опишем кратко некоторые уже полученные результаты в этом направлении исследований. В работе [13] авторы с помощью теории степени Лере–Шаудера и метода функции Грина, доказывают существование решений для краевой антипериодической задачи вида

$$^{C}D^{q}x(t) = f(t, x(t)),\ t \in [0, T],$$

$$x(0) = -x(T),\, x'(0) = -x'(T),$$

где символом $^{C}D^{q}$ – обозначается дробная производная Капуто порядка $q \in (1, 2)$ и $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. В статье [14] авторы на основе метода функции Грина и теоремы Красносельского–Крейна о неподвижной точке разрешили следующую краевую задачу

$$^{C}D^{q}x(t) = f(t, x(t)),\ t \in [0, T],$$

$$x(0) = -x(T),\, x'(0) = -x'(T),\, x''(0) = -x''(T),\, x'''(0) = -x'''(T),$$

для случая дробного порядка $q \in (3, 4)$ и непрерывной функции $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

В работе [15] исследовалась разрешимость в сепарабельном банаховом пространстве E краевой задачи для полулинейного дифференциального уравнения дробного порядка следующего вида

$$^{C}D^{q}x(t) = \lambda x(t) + f(t, x(t)),\ t \in [0, T],$$

с граничным антипериодическим условием

$$x(0) = -x(T),\, x'(0) = -x'(T),$$

где дробная производная Капуто порядка $q \in (1, 2)$, число $\lambda > 0$, $f\colon [0, T] \times E \to E$ – нелинейное отображение.

В настоящей статье мы исследуем разрешимость в сепарабельном банаховом пространстве E антипериодической краевой задачи для полулинейного дифференциального включения дробного порядка следующего вида

$$^{C}D^{q}x(t) \in \lambda x(t) + F(t, x(t)),\ t \in [0, T], \tag{1}$$

$$x(0) = -x(T),\, x'(0) = -x'(T),\, x''(0) = -x''(T) \tag{2}$$

где $^{C}D^{q}$ – дробная производная Капуто порядка $q \in (2, 3)$, число $\lambda > 0$, $F\colon [0, T] \times E \multimap E$ – нелинейное многозначное отображение.

1. Предварительные сведения

1.1. Дробный анализ. Вначале приведем необходимые базовые сведения из дробного анализа (см. монографии [3, 4]).

Определение 1. Дробным интегралом порядка $q > 0$ функции $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ называется функция $I^q g$ следующего вида:

$$I^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} g(s)\, ds,$$

где Γ – это гамма-функция Эйлера.

Отметим, что для гамма-функции Эйлера имеет место свойство (см., например, [4]):

$$\frac{1}{\Gamma(q)} = 0, \text{ для } q = 0, -1, -2, ... \tag{3}$$

Определение 2. Дробной производной Капуто порядка $q \geq 0$ функции $g \in C^n([0,T])$ называется функция ${}^C D^q g$ следующего вида:

$${}^C D^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int\limits_0^t (t-s)^{n-q-1} g^{(n)}(s)\, ds, \quad n = [q] + 1.$$

Важное значение в дробном анализе имеет функция Миттаг–Лефлера.

Определение 3. Функция вида

$$E_{q,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(qn+\beta)}, \quad q > 0,\ \beta \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C},$$

называется функцией Миттаг–Леффлера.

Рассмотрим задачу Коши для одномерного дифференциального уравнения дробного порядка $2 < q < 3$:

$${}^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$x(0) = c_1,\ x'(0) = c_2,\ x''(0) = c_3, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция. Единственным решением (см. [3]) данной задачи является функция

$$x(t) = c_1 E_{q,1}(\lambda t^q) + c_2 t E_{q,2}(\lambda t^q) + c_3 t^2 E_{q,3}(\lambda t^q) + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds. \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения и утверждения (см. [1])

$$E_{q,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t E_{q,\beta+q}(t), \tag{7}$$

$$\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n (t^{\beta-1}E_{q,\beta}(\lambda t^q)) = t^{\beta-n-1}E_{q,\beta-n}(\lambda t^q), \tag{8}$$

$$\int\limits_0^z t^{\beta-1}E_{q,\beta}(\lambda t^q)dt = z^\beta E_{q,\beta+1}(\lambda z^q), \tag{9}$$

Лемма 1. *(см. [16]) Для функции $f \in L^\infty([0,T];E)$ и $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$, справедливо равенство*

$$\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda(t-s)^\alpha)f(s)\,ds\Big)'_t = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\beta-1}(\lambda(t-s)^\alpha)f(s)\,ds.$$

1.2. **Меры некомпактности и уплотняющие мультиотображения.** Пусть $\mathscr{E}$ банахово пространство. Введем следующие обозначения:

- $P(\mathscr{E}) = \{A \subseteq \mathscr{E} : A \neq \varnothing\}$;
- $Pb(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A -$ ограничено$\}$;
- $Pv(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A -$ выпукло$\}$;
- $K(\mathscr{E}) = \{A \in Pb(\mathscr{E}) : A -$ компактно$\}$;
- $Kv(\mathscr{E}) = Pv(\mathscr{E}) \cap K(\mathscr{E})$.

Определение 4. (См., например, [17, 18]). Пусть $(\mathscr{A}, \geq)$ частично–упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathscr{E}) \to \mathscr{A}$ называется мерой некомпактности (мнк) в $\mathscr{E}$, если для каждого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$ выполняется $\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *монотонной,* если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathscr{E})$, включение $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ влечет неравенство $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
2) *несингулярной,* если для любого $a \in \mathscr{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$ выполняется равенство $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathscr{A}$ конус в банаховом пространстве, то мера некомпактности β называется:

4) *правильной,* если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$;
5) *вещественной,* если $\mathscr{A}$ подмножество действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественным порядком;
6) *алгебраически полуаддитивной,* если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$, для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathscr{E})$.

Примером вещественной мнк, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является мнк Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathscr{E}\ \}.$$

Отметим, что мнк Хаусдорфа удовлетворяет также свойству полуоднородности $\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega)$, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$. Более того, если $\mathscr{L} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ – линейный ограниченный оператор, то $\chi(\mathscr{L}(\Omega)) \leq \|\mathscr{L}\|\chi(\Omega)$ для любого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$.

Норма множества $M \in Pb(\mathscr{E})$ определяется по формуле $\|M\| = \sup_{x\in M} \|x\|_{\mathscr{E}}$.

Следующие понятия и утверждения можно найти в монографиях [17, 18].

Определение 5. Пусть X – метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathscr{F} : X \to P(\mathscr{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху (п.н.с.)*, если $\mathscr{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathscr{F}(x) \subset V\}$ – открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathscr{E}$,

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathscr{F}} = \{(x, y) : y \in \mathscr{F}(x)\}$ – замкнутое подмножество $X \times \mathscr{E}$,

(iii) *компактным*, если $\mathscr{F}(X)$ – относительно компактно в $\mathscr{E}$,

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Лемма 2. *Пусть X и Y – метрические пространства и $\mathscr{F} : X \to K(Y)$ – замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathscr{F}$ – п.н.с.*

Определение 6. Мультиотображение $\mathscr{F} : X \subseteq \mathscr{E} \to K(\mathscr{E})$ называется уплотняющим относительно мнк β (β - уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным выполнено $\beta(\mathscr{F}(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см., например, [17]).

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{M}$ – выпуклое замкнутое подмножество $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F} : \mathscr{M} \to Kv(\mathscr{M})$ – замкнутое β - уплотняющее мультиотображение, где β – несингулярная мера некомпактности в $\mathscr{E}$. Тогда множество неподвижных точек $\mathscr{F}$: $\mathrm{Fix}\,\mathscr{F} := \{x : x \in \mathscr{F}(x)\}$ – непустое множество.*

1.3. **Измеримые мультифункции.** Напомним некоторые понятия (см., например, [17, 18]). Пусть E – банахово пространство.

Определение 7. Мультифункция $G : [0, T] \to K(E)$, для $p \geq 1$, называется:

•L^p *-интегрируемой*, если она допускает L^p - интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g \in L^p([0, T]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, T]$;

$\bullet L^p$ *-интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0,T])$ такая, что:

$$\|G(t)\| := sup\{\|g\|_E : g(t) \in G(t)\} \leq \xi(t)$$

для п. в. $t \in [0,T]$.

Множество всех L^p - интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,T] \to K(E)$ обозначается $\mathscr{S}^p_G$.

Определение 8. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$, $p \geq 1$, называется L^p-полукомпактной, если она L^p-интегрально ограничена, то есть

$$\|\xi_n(t)\|_E \leq v(t) \,\text{для всех}\, n = 1,2,..., \text{ и п.в.}\, t \in [0,T],$$

где $v \in L^p_+([0,T])$ и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0,T]$.

Определение 9. Мультифункция G называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$. Мультифункция G называется сильно измеримой, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : [0,T] \to K(E)$ такая, что:

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{H}(G_n(t), G(t)) = 0,$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где $\mathscr{H}$ – хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E, понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p - интегрально ограничена, то она L^p - интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds := \left\{ \int_0^t g(s)ds : g \in \mathscr{S}^p_G \right\},$$

для любого $t \in [0,T]$.

Лемма 3. *(см. [17], Теорема 4.2.3.) Пусть E – сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0,T] \to P(E)$ L^p - интегрируемая и L^p - интегрально ограниченная мультифункция такая, что*

$$\chi(G(t)) \leq q(t),$$

для п. в. $t \in [0,T]$, где $q \in L^p_+([0,T])$. Тогда

$$\chi(\int_0^t G(s)ds) \leq \int_0^t q(s)ds,$$

для всех $t \in [0,T]$. В частности, если мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$ измерима и L^p - интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем:

$$\chi(\int_0^t G(s)ds) \leq \int_0^t \chi(G(s))ds,\ t \in [0,T].$$

Лемма 4. *(см. [17], Теорема 4.2.1.) Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0,T];E)$, для всех $n = 1,2,...$ и п. в. $t \in [0,T]$, является L^1- интегрально ограниченной. Предположим, что*

$$\chi(\{\xi_n(t)\}) \leq \alpha(t),$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где $\alpha \in L^1_+([0,T])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует компактное множество $K_\delta \subset E$ и множество $m_\delta \subset [0,T]$, с лебеговой мерой $m_\delta < \delta$, а также множество функций $G_\delta \subset L^1([0,T];E)$ со значениями в K_δ, такие, что для каждого $n \geq 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leq 2\alpha(t) + \delta, \qquad t \in [0,T]\backslash m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

2. Полученные результаты

Рассмотрим в сепарабельном банаховом пространстве E краевую задачу (4)–(5):

$${}^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad 2 < q < 3,$$

$$x(0) = c_1,\ x'(0) = c_2,\ x''(0) = c_3$$

где $f : [0,T] \to E$.

Определение 10. Решением краевой задачи (4)–(5) называется функция $x \in C([0,T];E)$, удовлетворяющая равенству

$$x(t) = c_1 E_{q,1}(\lambda t^q) + c_2 t E_{q,2}(\lambda t^q) + c_3 t^2 E_{q,3}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Лемма 5. *Пусть $f \in C([0,T];E)$ и*

$$v := (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^3 + E^2_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,3}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q) E^2_{q,2}(\lambda T^q) -$$
$$E_{q,-1}(\lambda T^q) E_{q,3}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - 2E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) \neq 0. \quad (10)$$

Тогда краевая задача (4), (2) имеет единственное решение $x(t) = \int_0^T G(t,s)f(s)ds$, *где функция Грина* $G(t,s)$ *имеет следующий вид*

$$G(t,s) = \begin{cases} v^{-1}\Big[v_1(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_2T(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) + \\ v_3T^2(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]E_{q,1}(\lambda t^q) + \\ v^{-1}\Big[v_4T^{-1}(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_5(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) + \\ v_2T(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]tE_{q,2}(\lambda t^q) + \\ v^{-1}\Big[v_6T^{-2}(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_4T^{-1}(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) + \\ v_1(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]t^2E_{q,3}(\lambda t^q) + \\ (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q), \qquad 0 \le s \le t < T, \\ \\ v^{-1}\Big[v_1(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_2T(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) + \\ v_3T^2(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]E_{q,1}(\lambda t^q) + \\ v^{-1}\Big[v_4T^{-1}(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_5(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) + \\ v_2T(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]tE_{q,2}(\lambda t^q) + \\ v^{-1}\Big[v_6T^{-2}(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_4T^{-1}(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) + \\ v_1(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]t^2E_{q,3}(\lambda t^q), \quad 0 \le t < s < T, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} v_1 &= E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q) - (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^2, \\ v_2 &= E_{q,2}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q), \\ v_3 &= E_{q,3}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - E^2_{q,2}(\lambda T^q), \\ v_4 &= E_{q,0}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q), \\ v_5 &= E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q) - (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^2, \\ v_6 &= E_{q,-1}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - E^2_{q,0}(\lambda T^q). \end{aligned}$$

Доказательство. Решение краевой задачи (4), (5) в банаховом пространстве E, как было отмечено выше, имеет следующий вид

$$x(t) = c_1E_{q,1}(\lambda t^q) + c_2tE_{q,2}(\lambda t^q) + c_3t^2E_{q,3}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

Используя формулу (8), а также лемму 1, мы можем найти его производные

$$x'(t) = c_1 t^{-1} E_{q,0}(\lambda t^q) + c_2 E_{q,1}(\lambda t^q) + c_3 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int\limits_0^t (t-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

$$x''(t) = c_1 t^{-2} E_{q,-1}(\lambda t^q) + c_2 t^{-1} E_{q,0}(\lambda t^q) + c_3 E_{q,1}(\lambda t^q) + \int\limits_0^t (t-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Благодаря свойству (3) справедливы равенства

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} = 0,$$

поэтому для функций $E_{q,0}(\lambda t^q)$ и $E_{q,-1}(\lambda t^q)$ мы имеем

$$E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \frac{1}{\Gamma(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)},$$

$$E_{q,-1}(\lambda t^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn-1)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn-1)},$$

следовательно

$$t^{-1} E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{qn-1}}{\Gamma(qn)}, \quad t^{-2} E_{q,-1}(\lambda t^q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{qn-2}}{\Gamma(qn-1)}.$$

Используя последние равенства, имеем

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \quad x''(0) = c_3.$$

В силу краевых условий (2), мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -c_1 = c_1 E_{q,1}(\lambda T^q) + c_2 T E_{q,2}(\lambda T^q) + c_3 T^2 E_{q,3}(\lambda T^q) + \\ \qquad \int\limits_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds, \\ -c_2 = c_1 T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + c_2 E_{q,1}(\lambda T^q) + c_3 T E_{q,2}(\lambda T^q) + \\ \qquad \int\limits_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds, \\ -c_3 = c_1 T^{-2} E_{q,-1}(\lambda T^q) + c_2 T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + c_3 E_{q,1}(\lambda T^q) + \\ \qquad \int\limits_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds. \end{cases}$$

Решение последней системы есть тройка

$$c_1 = v^{-1}\Big[v_1\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds + v_2T\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_3T^2\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big],$$

$$c_2 = v^{-1}\Big[v_4T^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds + v_5\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_2T\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big],$$

$$c_3 = v^{-1}\Big[v_6T^{-2}\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_4T^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds + v_1\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big].$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу для решения, мы получаем

$$x(t) = v^{-1}\Big[v_1\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds + v_2T\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_3T^2\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big]E_{q,1}(\lambda t^q) +$$

$$v^{-1}\Big[v_4T^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_5\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_2T\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big]tE_{q,2}(\lambda t^q) +$$

$$v^{-1}\Big[v_6T^{-2}\int\limits_0^T(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds+$$

$$v_4T^{-1}\int\limits_0^T(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds+$$

$$v_1\int\limits_0^T(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big]t^2E_{q,3}(\lambda t^q)+$$

$$\int\limits_0^t(t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds=\int\limits_0^T G(t,s)f(s)ds.$$

□

Для того, чтобы установить аналогичный результат для функции $f\in L^\infty([0,T];E)$, нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 6. *Для всякой функции $f\in L^\infty([0,T];E)$ существует последовательность $\{f_n\}\subset C([0,T];E)$ такая, что $f_n(t)\to f(t)$ во всех точках Лебега функции f из $[0,T]$, причем $\|f_n\|_{C([0,T];E)}\le\|f\|_{L^\infty([0,T];E)}$.*

Примером такой последовательности может послужить следующая, построенная на основе проектора Стеклова

$$f_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{2n}\int_{t-\frac1n}^{t+\frac1n}\hat f(s)ds, t\in[0,T];\\ 0, t\notin[0,T],\end{cases}$$

$$\hat f(t)=\begin{cases}f(t), t\in[0,T];\\ 0, t\notin[0,T].\end{cases}$$

Лемма 7. *(см. [19]) Для всякой функции $f\in L^\infty([0,T];E)$ множество ее точек Лебега есть множество полной меры для $[0,T]$.*

Таким образом, для функции $f\in L^\infty([0,T];E)$ существует последовательность $\{f_n\}\subset C([0,T];E)$ такая, что $f_n(t)\to f(t)$ для п.в. $t\in[0,T]$. Поэтому мы можем построить функцию Грина для краевой задачи (4), (2), имеющую тот же вид, что и в последней лемме, но уже при условии, что $f\in L^\infty([0,T];E)$.

Будем полагать, что мультиотображение $F:[0,T]\times E\to Kv(E)$ из задачи (1)–(2) удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ для всех $x\in E$ мультифункция $F(\cdot,x):[0,T]\to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ многозначное отображение $F(t,\cdot): E \to Kv(E)$ – полунепрерывно сверху;

$(F3)$ для каждого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого $x \in E$ с $\|x\|_E < r$, мы имеем

$$\|F(t,x)\|_E \leq \omega_r(t);$$

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$, мы имеем

$$\chi(F(t,\Omega)) \leq \mu(t)\chi(\Omega),$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где χ – мнк Хаусдорфа в E.

Для $x \in C([0,T];E)$ введем в рассмотрение мультифункцию:

$$\Phi_F : [0,T] \to Kv(E), \qquad \Phi_F(t) = F(t, x(t)).$$

Из условий $(F1)$ – $(F3)$ следует (см., [17], теорема 1.3.5), что мультифункция Φ_F является L^p–интегрируемой для любого $p \geq 1$.

Для решения нашей задачи мы будем использовать суперпозиционный мультиоператор $\mathscr{P}^\infty_F : C([0,T];E) \multimap L^\infty([0,T];E)$, определенный как:

$$\mathscr{P}^\infty_F(x) = \mathscr{S}^\infty_{\Phi_F}.$$

Рассмотрим мультиоператор Γ, заданный следующим образом:

$$\Gamma x(t) = \int\limits_0^T G(t,s)f(s)ds.$$

где $f \in \mathscr{P}^\infty_F(x)$.

Из условий $(F1)$ – $(F4)$ следует, что для функции $x \in C([0,T];E)$, функция $f \in L^\infty([0,T];E)$. При этом, из определения функции Грина следует, что для любого $t \in [0,T]$ и $2 < q < 3 : G(\cdot,s) \in L^p([0,T]), p \geq 1$, и функция Грина теряет непрерывность только в точке $s = T$, поэтому $\Gamma : C([0,T];E) \multimap C([0,T];E)$. Очевидно, если функция $x \in C([0,T];E)$ является решением задачи (1)–(2), то она является неподвижной точкой мультиоператора Γ. Поэтому, мы в дальнейшем будем доказывать существование неподвижных точек мультиоператора Γ.

Для доказательства существования неподвижных точек мультиоператора Γ введем в рассмотрение оператор $S : L^{\infty}([0,T];E) \to C([0,T];E)$ вида

$$S(f)(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Имеют место следующие утверждения (см. [7], [16]).

Лемма 8. *Для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^{\infty}([0,T];E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0,T]$, слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0,T];E)$ влечет сходимость $S(\eta_n) \to S(\eta_0)$ в $C([0,T];E)$.*

Лемма 9. *Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ – непустое ограниченное множество, тогда*

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s) ds : f \in \mathscr{P}_F^{\infty}(x),\, x \in \Omega \right\}$$

является равностепенно непрерывным множеством.

Для доказательства, того что мультиоператор Γ уплотняющий, рассмотрим конус $\mathbb{R}^2_+ = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_1 \geq 0, \zeta_2 \geq 0\}$ с естественным частичным порядком, и введем в пространстве $C([0,T];E)$ векторную меру некомпактности $\nu : Pb(C([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+$, определенную как $\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), mod_C(\Omega))$, где $\varphi(\Omega)$ есть модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0,T]} \chi(\{y(t) : y \in \Omega\}),$$

а вторая компонента суть модуль равностепенной непрерывности

$$mod_C(\Omega) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{y \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Обозначим через $v_1', v_2', v_3', v_4', v_5', v_6'$ сопряженные для $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, то есть

$$\begin{aligned}
v_1' &= E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q) + (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^2, \\
v_2' &= E_{q,2}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) + E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,3}(\lambda T^q), \\
v_3' &= E_{q,3}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) + E^2_{q,2}(\lambda T^q), \\
v_4' &= E_{q,0}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) + E_{q,-1}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q), \\
v_5' &= E_{q,-1}(\lambda T^q) E_{q,3}(\lambda T^q) + (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^2, \\
v_6' &= E_{q,-1}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) + E^2_{q,0}(\lambda T^q).
\end{aligned}$$

Теорема 2. *При выполнении условий* $(F1)-(F4)$, (10), *а так же следующего условия*

$$L\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} < 1, \tag{11}$$

где

$$L = |v|^{-1}\Big[v_1'\big((E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,1}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big)+ \\ v_2'\big(E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)\big) + v_3'E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q)+ \\ v_4'\big((E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,2}(\lambda T^q) + E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big) + v_5'E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)+ \\ v_6'(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,3}(\lambda T^q)\Big] + E_{q,1}(\lambda T^q) - 1, \tag{12}$$

$\mu(\cdot)$ – *функция из условия* $(F4)$, *мультиоператор* Γ *является* ν*-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ не пустое ограниченное множество такое, что

$$\nu(\Gamma(\Omega)) \geq \nu(\Omega). \tag{13}$$

Докажем, что Ω относительно компактное множество.

Из неравенства (13) следует, что

$$\varphi(\Gamma(\Omega)) \geq \varphi(\Omega). \tag{14}$$

Используя условие $(F4)$, а также свойства монотонности, алгебраической полуаддитивности и полуоднородности мнк Хаусдорфа, для $t \in [0,T]$ мы имеем следующие оценки

$$\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \leq$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds + v_2'T\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds+$$

$$v_3'T^2\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds\Big]\,\|\mu\|_\infty\,E_{q,1}(\lambda t^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4'T^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds + v_5'\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds+$$

$$v_2'T\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds\Big]\,\|\mu\|_\infty\,tE_{q,2}(\lambda t^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6' T^{-2}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds+$$

$$v_4' T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds+$$

$$v_1'\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds\Big]\left\|\mu\right\|_\infty t^2E_{q,3}(\lambda t^q)+$$

$$\left\|\mu\right\|_\infty\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\chi(\Omega(s))\,ds\le$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds+v_2' T\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_3' T^2\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\left\|\mu\right\|_\infty E_{q,1}(\lambda t^q)\varphi(\Omega)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4' T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds+v_5'\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_2' T\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\left\|\mu\right\|_\infty tE_{q,2}(\lambda t^q)\varphi(\Omega)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6' T^{-2}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_4' T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_1'\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\left\|\mu\right\|_\infty t^2E_{q,3}(\lambda t^q)\varphi(\Omega)+$$

$$\left\|\mu\right\|_\infty\varphi(\Omega)\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\,ds.$$

Для дальнейшей оценки $\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right)$ вычислим интегралы в последнем выражении с помощь формулы (9):

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds = -\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)d(T-s) =$$

$$\int\limits_0^T y^{q-1}E_{q,q}(\lambda y^q)dy = T^q E_{q,q+1}(\lambda T^q).$$

Аналогичным образом, мы имеем

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\,ds = T^{q-1}E_{q,q}(\lambda T^q),$$

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\,ds = T^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda T^q),$$

$$\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)ds = t^q E_{q,q+1}(\lambda t^q).$$

Теперь, заметим, что если мы возьмем $\beta = 1$ в формуле (7), мы получим

$$E_{q,1}(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda T^q E_{q,q+1}(\lambda T^q) = 1 + \lambda T^q E_{q,q+1}(\lambda T^q),$$

$$E_{q,1}(\lambda t^q) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda t^q E_{q,q+1}(\lambda t^q) = 1 + \lambda t^q E_{q,q+1}(\lambda t^q).$$

Используя свойство (3) и считая $\beta = 0$ или $\beta = -1$ в формуле (7), мы имеем

$$E_{q,0}(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(0)} + \lambda T^q E_{q,q}(\lambda T^q) = \lambda T^q E_{q,q}(\lambda T^q).$$

$$E_{q,-1}(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(-1)} + \lambda T^q E_{q,q-1}(\lambda T^q) = \lambda T^q E_{q,q-1}(\lambda T^q).$$

Таким образом, мы получаем следующие равенства

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds = T^q\frac{1}{\lambda T^q}\left(E_q(\lambda T^q) - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right),$$

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\,ds = \frac{1}{\lambda T}E_{q,0}(\lambda T^q),$$

$$\int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\, ds = \frac{1}{\lambda T^2} E_{q,-1}(\lambda T^q),$$

$$\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) ds = \frac{1}{\lambda}\left(E_{q,1}(\lambda t^q) - 1\right).$$

Мы теперь можем продолжить оценку $\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right)$ следующим образом

$$\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \le$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_2' T T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + v_3' T^2 T^{-2} E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} E_{q,1}(\lambda t^q)\varphi(\Omega) +$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4' T^{-1}\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_5' T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + v_2' T T^{-2} E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} t E_{q,2}(\lambda t^q)\varphi(\Omega) +$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6' T^{-2}\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_4' T^{-1} T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + v_1' T^{-2} E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} t^2 E_{q,3}(\lambda t^q)\varphi(\Omega) +$$

$$\left(E_{q,1}(\lambda t^q) - 1\right) \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega) \le$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_2' E_{q,0}(\lambda T^q) + v_3' E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} E_{q,1}(\lambda T^q)\varphi(\Omega) +$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4'\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_5' E_{q,0}(\lambda T^q) + v_2' E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} T^{-1} T E_{q,2}(\lambda T^q)\varphi(\Omega) +$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6'\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_4' E_{q,0}(\lambda T^q) + v_1' E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} T^{-2} T^2 E_{q,3}(\lambda T^q)\varphi(\Omega) +$$

$$\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega) =$$

$$\Big(|v|^{-1}\Big[v_1'\big((E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,1}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big) +$$

$$v_2'\big(E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)\big) + v_3' E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q) +$$

$$v_4'\big((E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,2}(\lambda T^q) + E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big) + v_5' E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q) +$$

$$v_6'(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,3}(\lambda T^q)\Big] + E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\Big) \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega) = L\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Из последней оценки мы получаем, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \le L\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega),$$

или, что тоже самое

$$\varphi\left(\Gamma(\Omega)\right) \le L\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Учитывая условия (11) и (15) вместе с последним неравенством, мы получаем

$$\varphi(\Omega) = 0.$$

Из неравенства (13) следует, что

$$mod_C(\Gamma(\Omega)) \geq mod_C(\Omega). \tag{15}$$

Из леммы 9 известно, что множество функций

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s) ds : f \in \mathscr{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega \right\}$$

является равностепенно непрерывным, поэтому

$$mod_C(\Gamma(\Omega)) = 0,$$

следовательно и $mod_C\,(\Omega) = 0$, поэтому $\nu(\Omega) = (0,0)$, что доказывает относительную компактность множества Ω. □

Теорема 3. *Мультиоператор* Γ *является п.н.с.*

Доказательство. Из аналитического задания мультиоператора Γ и свойств многозначных отображений (см., например, [17]), следует, что утверждение достаточно доказать для мультиоператора $S \circ \mathscr{P}_F^\infty$.

Покажем, что мультиотображение $S \circ \mathscr{P}_F^\infty$ является квазикомпактным. Возьмем непустое компактное множество $A \subset C([0,T];E)$ и рассмотрим последовательность $\{y_n\} \subset S \circ \mathscr{P}_F^\infty(A)$, $y_n = S(f_n)$, где $f_n \in \mathscr{P}_F^\infty(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset A$. Предположим, без ограничения общности, что $x_n \to x_0 \in A$. Из условия $(F4)$ следует, что последовательность $\{f_n(t)\} \subset E$ относительно компактна для п.в. $t \in [0,T]$, поэтому последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является L^1-полукомпактной. По критерию слабой относительной компактности Дистеля (см. [20]), мы можем предположить для произвольной подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$, что $f_{n_k} \xrightarrow{L^1} f_0$. В силу свойств слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора (см. [17], лемма 5.1.1), мы получаем тогда, что $f_0 \in \mathscr{P}_F^\infty(x_0)$. Теперь, применяя лемму 8, мы для соответствующей подпоследовательности получаем, что $y_{n_k} \to y_0 = S(f_0) \in S \circ \mathscr{P}_F^\infty(x_0)$.

Аналогично рассуждая мы придем к утверждению о том, что мультиоператор $S \circ \mathscr{P}_F^\infty$ является замкнутым. Сославшись на утверждение леммы 2 мы получаем желаемый результат. □

Теперь мы можем доказать главное утверждение работы.

Теорема 4. *При выполнении условий* $(F1), (F2), (F4)$, (10), *положим дополнительно, что вместо условия* $(F3)$ *выполняется*

$(F3')$ *существует функция* $\alpha \in L_+^\infty([0,T])$ *такая, что*

$$\|F(t,x)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|x\|_E).$$

Если

$$L\frac{k}{\lambda} < 1,$$

где $k = \max\left\{\|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty\right\}$, *функция* μ *из условия* $(F4)$, L *– константа определенная по формуле* (12), *тогда задача* (1)–(2) *имеет решение.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $x \in \mathscr{C} = C([0,T];E)$, тогда для $f \in \mathscr{P}_F^\infty(x)$ и $t \in [0,T]$ мы имеем следующую оценку:

$$\|\Gamma x(t)\|_E \leq$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds + v_2'T\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_3'T^2\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{\mathscr{C}})E_{q,1}(\lambda t^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4'T^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds + v_5'\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_2'T\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{\mathscr{C}})tE_{q,2}(\lambda t^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6'T^{-2}\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_4'T^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_1'\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{\mathscr{C}})t^2E_{q,3}(\lambda t^q)+$$

$$\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{\mathscr{C}})\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\,ds \leq$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\left(E_{q,1}(\lambda T^q)-1\right) + v_2'E_{q,0}(\lambda T^q) + v_3'E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big]\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})E_{q,1}(\lambda T^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4'\left(E_{q,1}(\lambda T^q)-1\right) + v_5'E_{q,0}(\lambda T^q) + v_2'E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big]\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})E_{q,2}(\lambda T^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6'\left(E_{q,1}(\lambda T^q)-1\right) + v_4'E_{q,0}(\lambda T^q) + v_1'E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big]\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})E_{q,3}(\lambda T^q)+$$

$$(E_{q,1}(\lambda T^q)-1)\,\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})=$$
$$\Big(|v|^{-1}\Big[v_1'\big((E_{q,1}(\lambda T^q)-1)E_{q,1}(\lambda T^q)+E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big)+$$
$$v_2'\big(E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q)+E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)\big)+v_3'E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q)+$$
$$v_4'\big((E_{q,1}(\lambda T^q)-1)E_{q,2}(\lambda T^q)+E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big)+v_5'E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)+$$
$$v_6'(E_{q,1}(\lambda T^q)-1)E_{q,3}(\lambda T^q)\Big]+E_{q,1}(\lambda T^q)-1\Big)\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})\le L\frac{k}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}}).$$

Теперь, если мы возьмем
$$R\ge\frac{Lk\lambda^{-1}}{1-Lk\lambda^{-1}},$$
тогда неравенство $\|x\|_{\mathscr{C}}\le R$, влечет за собой следующее $\|\Gamma x\|_{\mathscr{C}}\le R$. Следовательно, мультиоператор Γ преобразует замкнутый шар $B_R(0)\subset\mathscr{C}$ в себя. Таким образом, мультиоператор Γ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, поэтому Γ имеет неподвижные точки, а задача (1)–(2) имеет решение. □

Заключение

В статье была исследована разрешимость в сепарабельном банаховом пространстве антипериодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $q\in(2,3)$. Исходная краевая задача была сведена к задаче о существовании неподвижных точек соответствующего разрешающего интегрального мультиоператора. Используя теорию топологической степени для уплотняющих отображений и обобщенную теорему типа Б.Н. Садовского о неподвижной точке, были получены условия при которых для разрешающего мультиоператора существуют неподвижные точки.

Список литературы

1. GORENFLO, R, KILBAS, A. A, MAINARDI, F. and ROGOSIN, S. V. (2014) *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

2. HILFER, R. (2000) *Applications of Fractional Calculus in Physics.* Singapore: World Scientific.

3. KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M., and TRUJILLO, J. J. (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam: Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies.

4. PODLUBNY, I. (1999) *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press.
5. TARASOV, V. E. (2010) *Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. London, New York: Springer.
6. AFANASOVA, M., LIOU, Y. CH., OBUKHOVSKII, V. and PETROSYAN, G. (2019) On Controllability for a System Governed by a Fractional-order Semilinear Functional Differential Inclusion in a Banach Space. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis.* 20 (9). p. 1919–1935.
7. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G., YAO, J. C. (2017) On Semilinear Fractional Order Differential Inclusions in Banach spaces. *Fixed Point Theory.* 18 (1). p. 269–292.
8. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G., YAO, J. C. (2019) On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional-Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space. *Mathematics.* 7 (12). p. 5–19.
9. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G., YAO, J. C. (2021) On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space. *Mathematics.* 9 (2). p. 136–154.
10. CHEN, Y., NIETO, J. J., O'REGAN, D. (2007) Antiperiodic Solutions for Fully Nonlinear First-order Differential Equations. *Math. Comput. Modelling.* 46. p. 1183-–1190.
11. DELVOS, F. J., KNOCHE, L. (1999) Lacunary Interpolation by Antiperiodic Trigonometric Polynomials. *BIT.* 39. p. 439-–450.
12. SHAO, J. (2008) Anti-periodic Solutions for Shunting Inhibitory Cellular Neural Networks with Time-varying Delays. *Phys. Lett. A.*. 372. p. 5011-–5016.
13. AHMAD, B., NIETO, J. J. (2010) Existence of Solutions for Anti-periodic Boundary Value Problems Involving Fractional Differential Equations via Leray-Schauder Degree Theory. *Topological Methods in Nonlinear Analysis.* 35. p. 295-–304.
14. AGARWAL, R. P., AHMAD, B. (2011) Existence Theory for Anti-periodic Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations and Inclusions. *Computers and Mathematics with Applications.* 62. p. 1200-–1214.
15. PETROSYAN, G. (2020) Antiperiodic Boundary Value Problem for a Semilinear Differential Equation of Fractional Order. *The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics.* 34. p. 51–66.

16. KAMENSKII, M., PETROSYAN, G., WEN, C. F (2021) An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space. *Journal of Nonlinear and Variational Analysis.* 5 (1). p. 155–177.

17. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., ZECCA, P. (2001) *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces.* Berlin–New–York: Walter de Gruyter.

18. OBUKHOVSKII, V. V, GELMAN, B. D. (2020) *Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications.* Singapore: World Scientific.

19. BOGDAN, V. M. (2010) *Generalized Vectorial Lebesgue and Bochner Integration Theory.* arXiv:1006.3881v1 [math.FA].

20. DIESTEL, J., RUESS, W. M., SCHACHERMAVER, W. (1993) On weak compactness in $L^1(\mu, X)$. *Proc. Amer. Math. Soc..* 118. p. 447–453.