**УДК: 517.958**

**MSC2010: 35K05, 35R05** **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-2-43-52**

# О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С НЕИДЕАЛЬНЫМ ТЕПЛОВЫМ КОНТАКТОМ МЕЖДУ СЛОЯМИ

**© В. В. Калманович**

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

кафедра физики и математики

ул. Степана Разина, 26, Калуга, 248023, Российская Федерация

e-mail: *v572264@yandex.ru*

**On the construction of solution of the heat equation in a multilayer medium with imperfect contact between the layers.**

**Kalmanovich V. V.**

**Abstract.** The paper considers the solution of a one-dimensional homogeneous equation of heat conduction in a multilayer

$$a_2^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1^{(i)}(x)\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}\right) = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t}, \quad i = \overline{1,n}$$

where the superscript in parentheses indicates the layer number, $a_1(x)$ and $a_2(x)$ depend on the geometrical and physical parameters of the layer. The flow is directed along the axis $x$ Matching conditions of the third type are accepted at the contact points of the layers

$$T^{(i+1)}(x_{i+1},t) - T^{(i)}(x_{i+1},t) = -r^{(i+1)}J^{(i)}(x_{i+1},t),$$
$$J^{(i)}(x_{i+1},t) = J^{(i+1)}(x_{i+1},t), \ \ i = \overline{1,n-1},$$

where $r^{(i+1)}$ is a thermal resistance coefficients at the contact points of the layers $x_{i+1}$ and $J^{(i)}$ is the flow.

The initial temperature distribution is given

$$T^{(i)}(x,0) = g(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1,n}$$

and the first boundary value problem is posed

$$T^{(1)}(x_1,t) = 0, \quad T^{(n)}(x_{n+1},t) = 0.$$

The solution is constructed by combining the Fourier method, the matrix method and the method of generalized powers of Bers. Previously, this approach was used to construct solutions of the heat equation under continuous matching conditions at the layer boundary.

The method of generalized powers makes it possible to obtain a unified analytical form for solving the problem for various geometries of a multilayer medium: translational, axial or central symmetry.

The essence of the matrix method is reduced to the sequential multiplication of functional matrices that depend on the physical and geometric parameters of the layers of the medium (the elements of these matrices are expressed in terms of generalized powers) and matrices describing the thermal resistance at the points of contact of the layers. Thus, it is possible to express the relationship between the value of the amplitude function at the point $x_1$ and the values of this function at any other point in the medium. Thus, it is possible to find uniform eigenvalues and the corresponding eigenfunctions for the entire medium for any finite number of layers by linking the values of the amplitude function at the boundary points $x_1$ and $x_{n+1}$ of the medium.

In this paper, the orthogonality of the obtained eigenfunctions is proved.

***Keywords***: *heat conduction equation, matrix method, multilayer medium, imperfect thermal contact.*

## Введение

Решение многих задач современной инженерной практики связано с исследованием и прогнозированием процессов тепломассопереноса в многослойных конструкциях. Особенно интересны задачи с неидеальным тепловым контактом между слоями, возникающим вследствие зазоров, шероховатостей поверхностей, наличием термического сопротивления и др. При изучении реальных тепловых процессов методами математического моделирования важно иметь аналитические или приближенные аналитические методы решения, которые заметно могут упростить анализ процессов, прогноз поведения отдельных материалов конструкции, выявить возможные нежелательные явления и др. В качестве одного из таких аналитических методов может быть применен подход, состоящий в сочетании матричного метода и метода обобщённых степеней Берса.

Идея матричного метода применительно к задачам теплопроводности в составных пластинах была описана в [1]. Однако для решения задач тепломассопереноса в многослойных средах он не получил распространения, возможно, из-за того, что формулы аналитического решения получались очень громоздкими, системы компьютерной алгебры в то время (середина XX в.) только начинали зарождаться, так что численные методы были предпочтительными. В настоящее время самые разные программные продукты успешно справляются с этой проблемой, что позволило нам применить матричный метод для моделирования стационарных [2, 3] и нестационарных процессов [4], причем слоёв может быть произвольное конечное число. В этих работах используется сочетание матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса [5, 6], что позволило в единой аналитической форме получить алгоритм решения задачи тепломассопереноса в средах с различной геометрией, а именно обладающей сдвиговой, осевой или центральной симметрией. Отметим, что идея матричного метода может быть использована не только для прикладных расчётов, но и успешно применяется в теоретических работах [7].

Ранее сочетание матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса применялось нами для моделирования процессов переноса в многослойных средах с идеальным контактом. В настоящей работе построено решение задачи теплопроводности при неидеальном контакте, когда в граничных точках слоёв поток тепла непрерывен, а функция температуры терпит разрыв.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерное однородное уравнение процесса теплопроводности

$$a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1}$$

Поток направлен по оси $x$

$$J(x) = -a_1(x)\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Для дальнейшего удобства введём дифференциальные операторы

$$D_1 = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}, \quad D_2 = a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Коэффициенты уравнения (1) имеют вид $a_1(x) = p_s\lambda(x)x^s$,$a_2(x) = c(x)\rho(x)x^{s-1}$, где $\lambda^{(i)}$, $c^{(i)}(x)$, $p^{(i)}(x)$ - соответственно коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность среды на $i$-м слое. Процессу в среде со сдвиговой симметрией (плоские слои) по оси $x$ соответствует показатель $s = 1$, с осевой симметрией (цилиндрические слои) — показатель $s = 1$, с центральной симметрией (сферические слои) — показатель $s = 2$. Коэффициент $p_s$ для процессов с различными видами симметрии определен формулами $p_0 = 1$, $p_1 = 2\pi$, $p_2 = 4\pi$. С учётом введенных обозначений уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$D_2^{(i)}D_1^{(i)}T^{(i)} = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t}, \quad i = \overline{1,n} \tag{2}$$

$$J^{(i)} = -D_1^{(i)}T^{(i)}, \quad i = \overline{1,n},$$

где верхний индекс в скобках обозначает номер слоя.

На границах слоев примем условия согласования третьего типа

$$T^{(i+1)}(x_{i+1},t) - T^{(i)}(x_{i+1},t) = -r^{(i+1)}J^{(i)}(x_{i+1},t), \tag{3}$$

$$J^{(i)}(x_{i+1},t) = J^{(i+1)}(x_{i+1},t), \;\; i = \overline{1,n-1}, \tag{4}$$

где $r^{(i+1)}$ — коэффициент теплообмена в точке $x_{i+1}$ контакта $i$-го и $(i+1)$-го слоёв.

Пусть задано начальное распределение температуры

$$T^{(i)}(x,0) = g(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Поставим первую краевую задачу

$$T^{(1)}(x_1,t) = 0, \quad T^{(n)}(x_{n+1},t) = 0. \tag{6}$$

Решение поставленной задачи будем строить с помощью сочетания метода Фурье, матричного метода и метода обобщённых степеней Берса.

## 2. Обобщённые степени Берса

Понятие обобщённой степени было введено Л. Берсом [5] в середине XX века.

Пусть в линейном функциональном пространстве функций $f(x)$, определённых и непрерывных на промежутке $(a,b)$ и имеющих на этом промежутке производную, заданы операторы

$$D_1 = a_1(x)\frac{d}{dx}, \quad D_2 = a_2(x)\frac{d}{dx}$$

где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ — положительные функции на указанном промежутке. Существуют правые обратные операторы $I_1$ и $I_2$:

$$I_1 = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{d\xi}{a_1(\xi)} \cdots, \quad I_2 = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{d\xi}{a_2(\xi)} \cdots$$

Операция присоединения определяется как замена $D_1$ на $D_2$ (соответственно $I_1$ на $I_2$) и обратно. Это соответствует замене функций $a_1(x)$ и $a_2(x)$ друг на друга. Обозначим эту операцию знаком "$\sim$".

Обобщённые степени Берса с нуль точкой $x_1$ — это последовательность функций, определённая выражениями:

$$X^{(0)}(x,x_1) = \widetilde{X}^{(0)}(x,x_1) = 1,$$

$$X^{(n)}(x,x_1) = n! \begin{cases} (I_1 I_2)^p \cdot 1, & \text{при } n = 2p \\ I_1(I_2 I_1)^p \cdot 1, & \text{при } n = 2p+1. \end{cases}$$

$$\widetilde{X}^{(n)}(x,x_1) = n! \begin{cases} (I_2 I_1)^p \cdot 1, & \text{при } n = 2p \\ I_2(I_1 I_2)^p \cdot 1, & \text{при } n = 2p+1. \end{cases}$$

Имеют место правила дифференцирования

$$D_1 X^{(n)}(x,x_1) = n\widetilde{X}^{(n-1)}(x,x_1), \quad D_2 \widetilde{X}^{(n)}(x,x_1) = nX^{(n-1)}(x,x_1)$$

Л. Берс также ввел принцип соответствия, по которому обычному степенному ряду ряду $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i(x-x_1)^i$ сопоставляется ряд обобщённых степеней вида

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^{(i)}(x, x_1)$$

На основе принципа соответствия Л. Берсом были введены символы $\cos \mu X(x, x_1)$, $\sin \mu X(x, x_1)$, которым были сопоставлены ряды обобщенных степеней

$$\cos \lambda X(x, x_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \mu^{2i}}{(2i)!} X^{(2i)}(x, x_1), \tag{7}$$

$$\sin \mu X(x, x_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \mu^{2i+1}}{(2i+1)!} X^{(2i+1)}(x, x_1), \tag{8}$$

удовлетворяющие относительно дифференциальных операторов $D_1$, $D_2$ правилам, формально аналогичным обычным правилам дифференцирования:

$$D_1 \cos \mu X(x, x_1) = -\mu \sin \mu \widetilde{X}(x, x_1), \quad D_2 \cos \mu \widetilde{X}(x, x_1) = -\mu \sin \mu X(x, x_1),$$

$$D_1 \sin \mu X(x, x_1) = \mu \cos \mu \widetilde{X}(x, x_1), \quad D_2 \sin \mu \widetilde{X}(x, x_1) = \mu \cos \mu X(x, x_1),$$

$$D_2 D_1 \cos \mu X(x, x_1) = -\mu^2 \cos \mu X(x, x_1), \; D_2 D_1 \sin \mu X(x, x_1) = -\mu^2 \sin \mu X(x, x_1).$$

## 3. Построение решения уравнения

Частное решение уравнений (2) ищем в виде

$$T^{(i)}(x, t) = u^{(i)}(x) e^{-\mu^2 t}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда амплитудная функция $u^{(i)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} u^{(i)}(x) + \mu^2 u^{(i)}(x) = 0, \tag{9}$$

а также условиям третьего типа на контакте слоёв

$$u^{(i+1)}(x_{i+1}) - u^{(i)}(x_{i+1}) = -r^{(i+1)} j^{(i)}(x_{i+1}), \tag{10}$$

$$j^{(i)}(x_{i+1}) = j^{(i+1)}(x_{i+1}), \tag{11}$$

и граничным условиям

$$u^{(1)}(x_1) = 0, \quad u^{(n)}(x_{n+1}) = 0, \tag{12}$$

где $j^{(i)}(x) = -D_1^{(i)} u^{(i)}(x) = -a_1^{(i)}(x)(du^{(i)}/dx)$, $i = \overline{1, n}$,

Поставим на каждом слое задачу Коши, то есть зададим значение функции $u^{(i)}(x_i)$ и потока $j^{(i)}(x_i)$ в начальной точке $x_i$ слоя. Тогда решение задачи Коши для уравнения (3) на слое запишем в формализме Берса.

$$u^{(i)}(x) = u^{(i)}(x_i)\cos\mu X_i(x,x_i) - \frac{1}{\mu} j^{(i)}(x_i)\sin\mu X(x,x_i), \tag{13}$$

$$j^{(i)}(x) = u^{(i)}(x_i)\mu\sin\mu\widetilde{X}_i(x,x_i) + j^{(i)}(x_i)\cos\mu\widetilde{X}(x,x_i). \tag{14}$$

Далее введём вектор-столбцы $V(x)$ и $V(x_i)$ и матрицу $K$ на каждом слое, а также матрицу контактного сопротивления на границе слоёв $R$

$$V^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} u^{(i)}(x) \\ j^{(i)}(x) \end{pmatrix}, \quad V^{(i)}(x_i) = \begin{pmatrix} u^{(i)}(x_i) \\ j^{(i)}(x_i) \end{pmatrix},$$

$$K^{(i)}(x,x_i) = \begin{pmatrix} \cos\mu X_i(x,x_i) & -\frac{1}{\mu}\sin\mu X_i(x,x_i) \\ \mu\sin\mu\widetilde{X}_i(x,x_i) & \cos\mu\widetilde{X}_i(x,x_i) \end{pmatrix}, \quad R^{(i+1)} = \begin{pmatrix} 1 & -r^{(i+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем в матричной форме решение (13)–(14) на $i$-м слое

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x,x_i)V^{(i)}(x_i), \quad x_i \le x \le x_{i+1}, \quad i = \overline{1,n},$$

а также условия согласования (10)–(11) на контакте слоёв в точке $x_{i+1}$

$$V^{(i+1)}(x_{i+1}) = R^{(i+1)}V^{(i)}(x_{i+1}), \quad i = \overline{1,n-1}.$$

Отметим, что при постоянных коэффициентах $a_1$ и $a_2$ ряды обобщённых степеней (7) и (8) сходятся к известным функциям, через которые, таким образом, могут быть выражены элементы матрицы $K$ при постоянных физических параметрах на слое. В случае плоских слоёв матрица $K$ имеет вид

$$K^{(i)}(x,x_i) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} & -\frac{1}{\mu}\beta^{(i)}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} \\ \mu\beta^{(i)}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} & \cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} \end{pmatrix},$$

в случае осесимметричной среды элементы матрицы $K$ могут быть выражены через функции Бесселя

$$k_{11}^{(i)} = \frac{\pi\mu x_i}{2\alpha^{(i)}}\left(J_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - N_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

$$k_{12}^{(i)} = -\frac{\pi}{2\alpha^{(i)}\beta^{(i)}}\left(N_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - J_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

$$k_{21}^{(i)} = \frac{\pi\mu^2\beta^{(i)}x_i x}{2\alpha^{(i)}}\left(J_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - N_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

$$k_{22}^{(i)} = \frac{\pi\mu x}{2\alpha^{(i)}}\left(N_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - J_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

а в случае центральной симметрии среды элементы матрицы $K$ имеют вид

$$k_{11}^{(i)} = \frac{1}{x}\left(x_i\cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} + \frac{\alpha^{(i)}}{\mu}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}}\right),$$

$$k_{12}^{(i)} = -\frac{1}{\mu\beta^{(i)}x_i x}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}},$$

$$k_{21}^{(i)} = \mu\beta^{(i)}\left(\left(xx_i + \left(\frac{\alpha^{(i)}}{\mu}\right)^2\right)\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} - \frac{\alpha^{(i)}(x-x_i)}{\mu}\cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}}\right),$$

$$k_{22}^{(i)} = \frac{1}{x_1}\left(x\cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} - \frac{\alpha^{(i)}}{\mu}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}}\right),$$

где $\alpha^{(i)} = \sqrt{\lambda^{(i)}(c^{(i)}\rho^{(i)})^{-1}}$, $\beta^{(i)} = \sqrt{\lambda^{(i)}c^{(i)}\rho^{(i)}}$.

Далее начиная с первого слоя и выполняя последовательную подстановку, получим

$$V^{(1)}(x) = K^{(1)}(x,x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x_1 \le x \le x_2;$$

$$V^{(2)}(x_2) = R^{(2)}V^{(1)}(x_2) = R^{(2)}K^{(1)}(x_2,x_1)V^{(1)}(x_1);$$

$$V^{(2)}(x) = K^{(2)}(x,x_2)V^{(2)}(x_2) = K^{(2)}(x,x_2)R^{(2)}K^{(1)}(x_2,x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x_2 \le x \le x_3;$$

$$...$$

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x,x_i)V^{(i)}(x_i) =$$

$$= K^{(i)}(x,x_i)R^{(i)}K^{(i-1)}(x_i,x_{i-1})R^{(i-1)}...R^{(2)}K^{(1)}(x_2,x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x_i \le x \le x_{i+1};$$

$$...$$

Введём обозначение для последовательного произведения матриц $K$ и $R$

$$K^{(i,1)}(x,x_1) = K^{(i)}(x,x_i)R^{(i)}K^{(i-1)}(x_i,x_{i-1})R^{(i-1)}...R^{(2)}K^{(1)}(x_2,x_1), \quad x_i \le x \le x_{i+1}.$$

Таким образом, в конечной точке системы слоев приходим к системе уравнений

$$V^{(n)}(x_{n+1}) = K^{(n,1)}(x_{n+1},x_1)V^{(1)}(x_1),$$

которая связывает значения функций $u^{(i)}(x)$ и $j^{(i)}(x)$ в граничных точках среды. Подставляя граничные условия (12), получим условие определения собственных значений $\mu_k$

$$k_{12}^{(n,1)} = 0$$

Обозначим $u_k^{(i)}(x)$ базисную функцию, соответствующую собственному значению $\mu_k$. Покажем, что полученные функции ортогональны.

**Теорема 1.** *Собственные функции $u_k(x)$ и $u_l(x)$ задачи (9)–(12), отвечающие различным собственным значениям $\mu_k$ и $\mu_l$, ортогональны с весом $1/a_2(x)$.*

*Доказательство.* Запишем собственные функции $u_k(x)$ и $u_l(x)$ послойно, то есть $u_k(x) = u_k^{(i)}(x)$ и $u_l(x) = u_l^{(i)}(x)$ при $x_i \le x \le x_{i+1}$. Также на каждом слое обозначим $j_k^{(i)}(x) = -a_1^{(i)}(x)(du_k^{(i)}/dx)$, $j_l^{(i)}(x) = -a_1^{(i)}(x)(du_l^{(i)}/dx)$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим тождества

$$\frac{d}{dx}\left(u_l^{(i)}(x)j_k^{(i)}(x)-u_k^{(i)}(x)j_l^{(i)}(x)\right)=u_l^{(i)}(x)\frac{dj_k^{(i)}}{dx}-u_k^{(i)}(x)\frac{dj_l^{(i)}}{dx},\quad i=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Так как $u_k^{(i)}(x)$ и $u_l^{(i)}(x)$ — решения уравнений (9), а значит, удовлетворяют равенствам

$$\frac{dj_k^{(i)}}{dx}=\frac{\mu_k^2u_k^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)},\quad \frac{dj_l^{(i)}}{dx}=\frac{\mu_l^2u_l^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)},$$

то перепишем (15) в виде

$$\frac{d}{dx}\left(u_l^{(i)}(x)j_k^{(i)}(x)-u_k^{(i)}(x)j_l^{(i)}(x)\right)=(\mu_k^2-\mu_l^2)\frac{u_k^{(i)}(x)u_l^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)}.$$

Тогда

$$(\mu_k^2-\mu_l^2)\int\limits_{x_1}^{x_{n+1}}\frac{u_k(x)u_l(x)}{a_2(x)}dx=(\mu_k^2-\mu_l^2)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{u_k^{(i)}(x)u_l^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)}dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}d\left(u_l^{(i)}(x)j_k^{(i)}(x)-u_k^{(i)}(x)j_l^{(i)}(x)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(u_l^{(i)}(x)j_k^{(i)}(x)-u_k^{(i)}(x)j_l^{(i)}(x)\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

В последней сумме после подстановки пределов интегрирования сгруппируем слагаемые относительно $j_k^{(i)}(x)$ и $j_l^{(i)}(x)$, после чего получим

$$(\mu_k^2-\mu_l^2)\int\limits_{x_1}^{x_{n+1}}\frac{u_k(x)u_l(x)}{a_2(x)}dx=u_l^{(1)}(x_1)j_k^{(1)}(x_1)-u_k^{(1)}(x_1)j_l^{(1)}(x_1)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(u_k^{(i)}(x_{i+1})-u_k^{(i+1)}(x_{i+1})\right)j_l^{(i)}(x_{i+1})+\left(u_l^{(i+1)}(x_{i+1})-u_l^{(i)}(x_{i+1})\right)j_k^{(i)}(x_{i+1})\right]+$$

$$+u_k^{(n)}(x_{n+1})j_l^{(n)}(x_{n+1})-u_l^{(n)}(x_{n+1})j_k^{(n)}(x_{n+1}).$$

После подстановки в последнюю формулу граничных условий (12) исчезают первые два и последние два слагаемых, а подстановка условий согласования в точках контакта слоёв (10)–(11) приводит оставшиеся слагаемые к виду

$$(\mu_k^2-\mu_l^2)\int\limits_{x_1}^{x_{n+1}}\frac{u_k(x)u_l(x)}{a_2(x)}dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(r^{(i+1)}j_k^{(i)}(x_{i+1})j_l^{(i)}(x_{i+1})-r^{(i+1)}j_l^{(i)}(x_{i+1})j_k^{(i)}(x_{i+1})\right)=0.$$

Так как $\mu_k \neq \mu_l$, то

$$\int\limits_{x_1}^{x_{n+1}} \frac{u_k(x)u_l(x)}{a_2(x)}dx = 0,$$

следовательно, собственные функции ортогональны с весом $1/a_2(x)$. □

При $\mu_k = \mu_l$ скалярное произведение собственных функций дает квадрат нормы

$$N_k^2 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a_2^{(i)}(x)} \left(u_k^{(i)}(x)\right)^2 dx.$$

Коэффициенты в разложении Фурье имеют вид

$$c_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) \frac{u_k^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)} dx.$$

Таким образом, получаем решение поставленной задачи (2)–(6)

$$T^{(i)}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{u_k^{(i)}(x)}{N_k} e^{-\mu_k^2 t}.$$

## Заключение

В работе построено аналитическое решение первой краевой задачи для одномерного однородного уравнения теплопроводности в многослойной среде с неидеальным тепловым контактом на границах слоёв. Метод построения основан на совместном применении метода Фурье, метода обобщенных степеней Берса и матричного метода, что позволило получить единую аналитическую форму решения для среды, обладающей различными видами симметрии (сдвиговой, осевой или центральной). Показана ортогональность собственных функций, отвечающих различным собственным значениям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271).

## Список литературы

1. CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C. (1959) *Conduction of Heat in Solids.* Oxford: Oxford University Press.

2. Степович, М. А., Калманович, В. В., Серегина, Е. В. О возможности приложения матричного метода к моделированию катодолюминесценции, обусловленной широким электронным пучком в планарной многослойной полупроводниковой

структуре // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2020. — Т. 84. — №5. — С. 700–703.

STEPOVICH, M. A., KALMANOVICH, V. V. & SEREGINA, E. V. (2020) Possibility of applying the matrix method to modeling the cathodoluminscescence caused by a wide electron beam in a planar multilayer semiconductor structures. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* 84(5). p. 576–579.

3. Калманович, В. В., Серегина, Е. В., Степович, М. А. Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2020. — Т. 84. — №7. — С. 1020–1026.

   KALMANOVICH, V. V., SEREGINA, E. V. & STEPOVICH, M. A., (2020) Mathematical modeling of heat and mass transfer phenomena caused by interaction between electron beams and planar semiconductor multilayers. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* 84 (7). p. 844–850.

4. KALMANOVICH, V. V., KARTANOV, A. A. & STEPOVICH, M. A. (2021) On some problems of modelling the non-stationary heat conductivity process in an axisymmetric multilayer medium. *Journal of Physics: Conference Series.* 1902. p. 6012073.

5. BERS, L. & GELBART, A. (1944) On a class of functions defined by partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society.* 56. p. 67–93.

6. Гладышев, Ю. А. О последовательности обобщенных степеней Берса с внутренней структурой // Математические заметки. — 1994. — Т. 55. — №3. — С. 21–34.

   GLADYSHEV, Yu A. (1994) On a sequence of generalized Bers exponential functions with inte-rior structure Mathematical Notes. *Mathematical Notes.* 55 (3). p. 251–261.

7. Голубков, А. А. Краевая задача для уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой и условиями разрыва решений // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — Т. 16. — С. 1005–1027.

   GOLUBKOV, A. A. (2019) A boundary value problem for the Sturm-Liouville equation with piecewise entire potential on the curve and solution discontinuity conditions. *Siberian Electronic Mathematical Reports.* 16. p. 1005-1027.